

Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. ESP. VECTORIALES Y BASES

1. Estúdiense si el conjunto \mathbb{R}^2 respecto de las operaciones:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, 0)$$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{R}

Solución: No es un espacio vectorial porque no se cumple la propiedad que exista un elemento neutro en el cuerpo \mathbb{K} tal que $\alpha(a, b) = (a, b)$ porque si $b \neq 0$, no lo podemos encontrar.

2. Estúdiense si tiene estructura de subespacio vectorial el subconjunto de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$ formado por todas las ternas (x, y, z) tales que $x - y + z = 2$. Haz lo mismo con la condición $x - y + z = 0$

Solución: El primero no, ya que el 0 no pertenece (no cumple la ecuación). El segundo sí que es subespacio vectorial, basta con comprobar que el 0 pertenece (comprobando que cumple la ecuación) y que dados dos vectores u, v que cumple la ecuación y están en el subespacio, y dados dos escalares cualesquiera α, β tenemos que $\alpha u + \beta v$ pertenece al subespacio (es decir, cumple la ecuación).

3. Sea $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 3)\}$ un conjunto de vectores de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$. Demuéstrase que estos vectores forman una base de \mathbb{R}^3 y calcular las coordenadas del vector $(3, 1, 2)$ respecto de esta base.

Solución: Si ponemos en una matriz esos 3 vectores como columnas y hacemos el determinante, veremos que nos da 6 que es distinto de 0, luego son linealmente independientes. Como son 3 vectores en \mathbb{R}^3 que tiene dimensión 3, el conjunto B es una base.

Las coordenadas de $(3, 1, 2)$ respecto de la base B son $(2, -1, 1)$. Se pueden calcular resolviendo el sistema $(3, 1, 2) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(1, 1, 3)$ o a través de la matriz de cambio de base.

4. En el espacio vectorial $(V, +, \cdot \mathbb{R})$, demuéstrase que si los vectores $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base, también es una base la formada por los vectores $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ siendo

$$v_1 = 2u_1 + u_3, v_2 = 2u_2, v_3 = u_1 - 3u_3$$

Solución: Hay que comprobar si los vectores v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes. Podemos hacerlo mediante la definición $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La otra manera es coger las coordenadas de los vectores y comprobar que son linealmente independientes, porque sabemos que si las coordenadas cumplen algo también lo cumple los vectores porque existe un isomorfismo. Las coordenadas son $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ y $(1, 0, -3)$.

5. Demuéstrase que el conjunto formado por los vectores

$$1 + 2x, 1 + x^2, 1 - x^2, 2 - x$$

es linealmente dependiente en el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que dos. A partir de dicho conjunto, encontrar un conjunto máximo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

6. Obtenga el valor o valores de h para que y esté en $Gen\{v_1, v_2, v_3\}$ siendo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

Solución: A través de un sistema (ya que y tiene que ser combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$) podemos ver que valor tiene que tener h para que el sistema tenga solución. Si $h = 5$ entonces pertenece, en otro caso no.

7. Liste dos vectores en $Gen\{v_1, v_2\}$ siendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -62 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución: Cualesquiera dos que estén en las combinaciones lineales $av_1 + bv_2$, dándole valores a a y b .

8. Describa geoméricamente $Gen\{v_1, v_2\}$ para los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Solución: Tenemos que ver que describen: un punto, una recta, un plano, etc... Se comprueba que son proporcionales y entonces los que describen es un subespacio de dimensión 1, luego es una recta.

9. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes. Justifique la respuesta.

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Solución: Por ejemplo, haciendo el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores obtenemos que en el primer caso sí son linealmente independientes y en el segundo no.

10. Determine si b es una combinación lineal de los vectores a_1 , a_2 y a_3 : $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solución: Resolviendo el sistema $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = b$ veremos si existen esos parámetros. En efecto, sería $\alpha = -3$, $\beta = -1$ y $\gamma = 1$

11. a) Demuéstrese que el conjunto

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q} : x + y + z + w = 0, x + y - z - w = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot)$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- b) Si sabemos la dimensión de U tendremos un dato importante. Para ello, a partir de las ecuaciones de U , las resolvemos y obtenemos dos vectores que son la base. Por tanto tiene dimensión 2. Si los vectores que nos dan son linealmente independientes y pertenecen a U (cumplen las ecuaciones) entonces serán base. Efectivamente, se comprueba fácilmente que son linealmente independientes y por tanto base.
- c) Se resuelve el sistema y obtenemos que las coordenadas son $(-3,5)$.
12. Hállese la dimensión de los subespacios de \mathbb{R}^5 generados por los siguientes subconjuntos de vectores:

$$A = \{(1, 1, 1, -1, -1), (2, 0, 2, 0, 1), (3, 1, 3, -1, 0), (5, 1, 5, -1, 1)\}$$

$$B = \{(6, 3, 9, 3, 3), (8, 4, 12, 4, 4), (10, 5, 15, 5, 5)\}$$

Solución: El conjunto A tiene dimensión 2 y el conjunto B tiene dimensión 1.

13. Determináse la dimensión y una base de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot \mathbb{R})$:

$$U = \{(x, y, z, w) : x - y = 0, 2x + z + w = 0, x + y + z + w = 0\}$$

$$W = \{(\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Solución:

$$U = \{((-1/2, -1/2, 1, 0), (-1/2, -1/2, 0, 1))\} \text{ y } W = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

14. Sean $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V de las que sabemos que:

$$u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_1 + v_3$$

- a) Calcúlese la matriz de cambio de base de B a B'
- b) Calcúlese la matriz de cambio de base de B' a B
- c) Calcúlese las coordenadas del vector $v = (1, 0, 3)_B$ respecto de B' y las del vector $w = (5, 3, 1)_{B'}$ respecto de B .

Solución:

$$a) M_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) M_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- c) Multiplicando por las matrices de cambio de base obtenemos $v = (1, 0, 3)_B = (4, 1, 3)_{B'}$ y $w = (5, 3, 1)_{B'} = (7/2, -1/2, 3/2)_B$.

15. Sean $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dos bases de un espacio vectorial V de las que sabemos que:

$$u_1 = v_1 + v_3, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_2 + v_4, u_4 = v_1 + 2v_4$$

- a) Calcúlese la matriz de cambio de base de B a B'

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$$b) M_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Multiplicando por las matrices de cambio de base obtenemos $v = (1, 1, 2, 2)_B = (3, 3, 2, 6)_{B'}$ y $w = (0, 7, 0, 3)_{B'} = (4, -4, 11, -4)_B$.

16. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión 3. Dados los vectores $u = u_1 - 2u_2 + 3u_3$, $v = 2u_1 - 3u_2 + u_3$, y $w = -au_2 + bu_3$,

- (a) ¿Qué relación deben cumplir a y b para que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea también una base?
- (b) Para $a = 1$ y $b = 4$, halla las coordenadas del vector $3u_1 - 6u_2 + 8u_3$ respecto de la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{u, v, w\}$.

Solución:

- a) Ponemos las coordenadas de los vectores como columnas de una matriz y hacemos el determinante. Cuando ese determinante sea distinto de 0, serán linealmente independientes. En este caso, cuando $b - 5a \neq 0$
- b) Con la matriz de cambio de base de B a $\tilde{\mathcal{B}}$, multiplicando por las coordenadas obtenemos que las coordenadas en base $\tilde{\mathcal{B}}$ son $(1, 1, 1)$

17. Dado el siguiente subespacio de \mathbb{R}^4 $S = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, z + 2t = 0\}$, calcula una base y la dimensión de S , y amplía dicha base hasta una base de \mathbb{R}^4 .

Solución: Resolviendo las ecuaciones tenemos que una base está formada por los vectores $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -2, 1)\}$, luego tiene dimensión 2. Una extensión de la base al total podría ser (mediante el algoritmo) $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, -2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

18. Sea $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 4z + 8t\}$. Prueba que S es subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 . Halla dos bases diferentes de S , e indica la dimensión de S .

Solución: Para probar que es subespacio ya se ha comentado en otros ejercicios lo que hay que hacer, y efectivamente lo es. Si resolvemos la ecuación que nos da tenemos que una base del subespacio es $\{(1, 0, 0, 0), (0, -3, 1, 0), (0, -7, 0, 1)\}$, luego tiene dimensión 3. Otra base de S podría ser $\{(4, 0, 0, 0), (0, -6, 2, 0), (0, 21, 0, -3)\}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70