

## Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. DIAGONALIZACIÓN

1. Estudiar si la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 3 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 5 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 7 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

2. Demostrar que para cualquier  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  matriz triangular (superior o inferior) sus autovalores son los elementos de la diagonal. ¿Es  $A$  siempre diagonalizable? (AYUDA: considera la matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  con todos los elementos nulos salvo  $a_{12} = 1$ ).
3. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene los autovalores  $\lambda_1 = 1$  con multiplicidad algebraica 1, y  $\lambda_2 = 2$  con multiplicidad algebraica 2.

- (i) Encontrar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tales que  $D = P^{-1} A P$ .
- (ii) Determinar la matriz  $A^{28}$  utilizando el apartado anterior.
4. Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, indicar las matrices diagonales que se pueden obtener a partir de las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Demostrar que  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es inversible si y solo si 0 NO es autovalor de  $A$ .
6. Sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ . Entonces, se pide:
- Calcular los autovalores de la traspuesta de  $A$  ( $A^t$ ).
  - Calcular los autovalores y autovectores de  $A^2, A^3, \dots, A^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).
  - Calcular los autovalores y autovectores de  $A^{-1}$ .
  - Si  $A$  es diagonalizable, ¿son  $A^t, A^2$  ó  $A^{-1}$  diagonalizables? Razona tus respuestas y en caso afirmativo calcula sus diagonalizaciones.

7. Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Estudiar cuándo  $A$  es diagonalizable (en función del signo de  $a^2 + 4b$ ).

8. Demostrar que la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  es diagonalizable si y sólo si  $b = 0$ .

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The logo is set against a light blue background with a white shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

10. Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Hallar los autovalores y los autoespacios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Indicar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular una matriz diagonal  $D$  y una matriz de cambio de base  $P$  que cumpla  $P^{-1}AP = D$ .

12. Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular  $A^n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

¿Es diagonalizable  $A$ ? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal  $D$ , indicando qué matriz de cambio de base  $P$  se utiliza.

14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

Calcular los valores propios y vectores propios de  $A$  ¿es diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ ? Razonar la respuesta y, si es posible, indicar  $D$  y  $P$ .

15. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Calcular el polinomio característico y los valores propios (reales) de  $A$ . ¿Es  $A$  diagona-



Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

17. Consideremos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ .

¿Es diagonalizable  $A$ ? Razona tu respuesta y, si es posible, calcula una matriz diagonal  $D$  semejante a  $A$  y la matriz de cambio de base  $P$  que estás empleando para obtener dicha matriz  $D$ .

18. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcular los valores propios de  $A$  y su multiplicidad algebraica.
- (ii) ¿Es diagonalizable? Razonar la respuesta.
- (iii) Calcular si es posible una matriz inversible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  que cumplan  $P^{-1}AP = D$ .
- (iv) Calcular la potencia  $A^{100}$ .

19. Determinése los autovalores y autovectores de los siguientes endomorfismos dados por:

- $f(x, y, z) = (2y + 2z, 2x - z, -x - y)$
- $g(x, y) = (-3x + 4y, 4x + 3y)$
- $h(x, y, z) = (x, 2x + 2y + 2z, -x + y + 3z)$

20. Sea  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$  una base de un espacio vectorial  $V_3$  y sea  $f$  una aplicación lineal de  $V_3$  a  $V_3$  dado por:

$$f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_1 - 2u_2, \text{Ker } f = L[u_2 - u_3]$$

Se pide:

- La matriz de  $f$  respecto de la base  $B$
- La imagen de  $f$  y su dimensión
- El polinomio característico y los autovalores de  $f$
- Una base  $B'$  respecto de la cual la matriz de  $f$  es diagonal
- La matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**