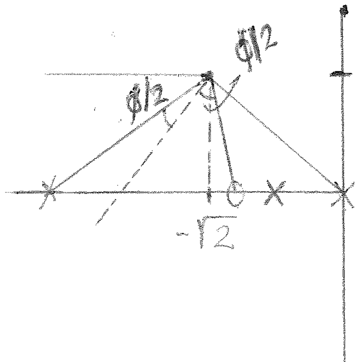
① $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$; $\zeta = 1/\sqrt{2}$ $\quad s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$

$w_n = 2\ rad/s$

POLOS DESEADOS: $S_d = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}j$

$$G_c(s) \cdot G(s) = K_c \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \cdot G(s) \; ; \; 0 < \alpha < 1$$

BISECTRIZ



$$\angle \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{S_d = -\sqrt{2}+\sqrt{2}j} \simeq 241°$$

$$-241° + \phi = \pm 180°(2n+1) = -180°$$

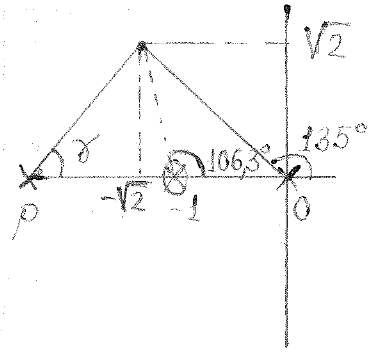
$$\phi = 61°$$

CERO: $\dfrac{\sqrt{2} - 1/T}{\sqrt{2}} = \tan(8°)$; $\dfrac{1}{T} = 1,2155$

POLO: $\dfrac{1/\alpha T - \sqrt{2}}{2} = \tan(53°)$; $\dfrac{1}{\alpha T} = 3,2909$

CONDICIÓN DE MAGNITUD: $\left| K_c \cdot \dfrac{(s+1,2155)}{(s+3,2909)} \cdot \dfrac{1}{s(s+1)} \right|_{S_d = -\sqrt{2}+\sqrt{2}j} = 1 \rightarrow K_c = 1,8$

CANCELACIÓN CERO-POLO



SUMA DE ÁNGULOS = −180°

$$-135° - 106,3° + 106,3° - \gamma = -180° \rightarrow \gamma = 45°$$

$$\tan(45°) = \frac{\sqrt{2}}{p - \sqrt{2}} \; ; \; p = 2\sqrt{2}$$

$$\left| K_c \cdot \frac{(s+1)}{(s+2,8284)} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right|_{S_d = -\sqrt{2}+\sqrt{2}j} = 1 \rightarrow K_c = 4$$

② $G(s) = \dfrac{1}{s(s+3)}$ $\qquad \zeta = 0{,}5$ $\qquad s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2$

$w_n = 5 \text{ rad/s}$ $\qquad s_d = -\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{5\sqrt{3}}{2} j$

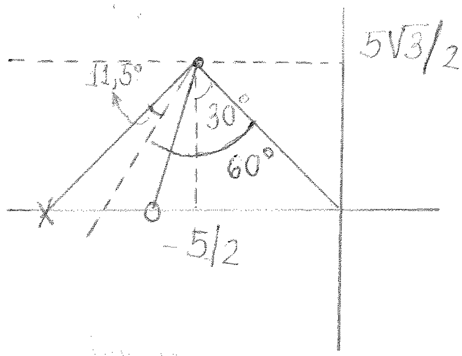
$s_d = -2{,}5 \pm 4{,}3 j$

$$G_c(s)\,G(s) = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \cdot G(s)$$

$$= K_c \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \cdot \frac{1}{s(s+3)} =$$

$$\angle \left. \frac{1}{s(s+3)} \right|_{s = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} j} \simeq -203{,}4^\circ \; (\simeq -203^\circ) \; ; \quad -203^\circ + \phi = \pm 180^\circ (2K+1) = -180^\circ$$

$\phi = 23^\circ$



CERO: $\dfrac{\frac{1}{T} - \frac{5}{2}}{5\sqrt{3}/2} = \tan(18{,}5^\circ)$; $\dfrac{1}{T} = 3{,}9$

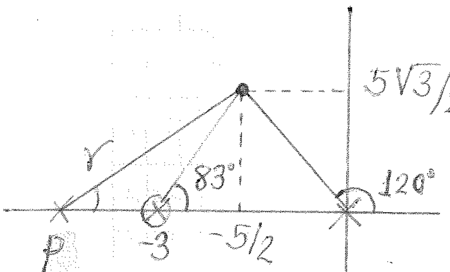
POLO: $\dfrac{\frac{1}{\alpha T} - \frac{5}{2}}{5\sqrt{3}/2} = \tan(41{,}5^\circ)$; $\dfrac{1}{\alpha T} = 6{,}3$

$$G_c = K_c \cdot \frac{(s+3{,}9)}{(s+6{,}3)}$$

CONDICIÓN DE MAGNITUD: $|G_c \cdot G| = 1$

$$\left| K_c \cdot \frac{(s+3{,}9)}{(s+6{,}3)} \cdot \frac{1}{s(s+3)} \right|_{s = -2{,}5 + 4{,}3j} = 1 \; ; \qquad K_c = 27{,}5$$

CANCELACIÓN CERO-POLO



$$-120^\circ \cancel{-83^\circ} \cancel{+83^\circ} - \gamma = -180^\circ$$

$\gamma = 60^\circ$

$\tan 60^\circ = \dfrac{4{,}3}{p - 2{,}5}$; $p \simeq 5$

$$G_c = K_c \cdot \frac{(s+3)}{(s+5)}$$

$$\left| K_c \cdot \frac{\cancel{(s+3)}}{(s+5)} \cdot \frac{1}{s\cancel{(s+3)}} \right|_{s = -2{,}5 + 4{,}3j} = 1 \; ; \qquad K_c = 25$$

③ $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+3)}$ $\qquad \zeta = 0{,}4$ $\qquad s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2$

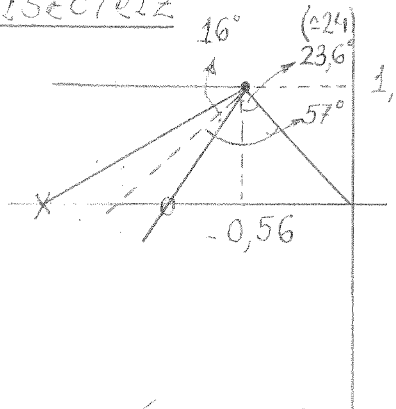
$w_n = 1{,}4 \text{ rad/s} \qquad s_d = -0{,}56 \pm 1{,}28j$

$$G_c(s) \cdot G(s) = K_c \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$\left. \angle \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \right|_{s=-0{,}56+1{,}28j} \cong -212{,}2^\circ \ (\simeq -212^\circ); \quad -212^\circ + \phi = \pm 180^\circ(2K+1) = -180^\circ$$

$$\phi = 32^\circ$$

BISECTRIZ



CERO: $\dfrac{\frac{1}{T} - 0{,}56}{1{,}28} = \tan(17^\circ); \quad \dfrac{1}{T} = 0{,}95$

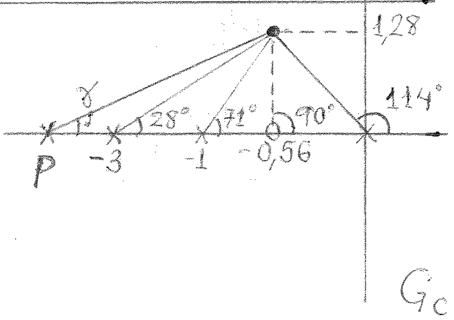
POLO: $\dfrac{\frac{1}{\alpha T} - 0{,}56}{1{,}28} = \tan(49^\circ); \quad \dfrac{1}{\alpha T} = 2{,}03$

$$G_c = K_c \frac{(s+0{,}95)}{(s+2{,}03)}$$

CONDICIÓN DE MAGNITUD: $\left| G_c \cdot G \right| = 1$ $\qquad K_c = 7{,}52$

$$\left| K_c \cdot \frac{(s+0{,}95)}{(s+2{,}03)} \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \right|_{s=-0{,}56+1{,}28j} = 1 \ ;$$

CRITERIO DE LA VERTICAL



$$-114^\circ + 90^\circ - 71^\circ - 28^\circ - \gamma = -180^\circ$$

$$\gamma = 57^\circ$$

$$\tan(57^\circ) = \frac{1{,}28}{p - 0{,}56}; \quad p = 1{,}4$$

$$G_c = K_c \frac{(s+0{,}56)}{(s+1{,}4)}$$

$K_c = 6{,}31$

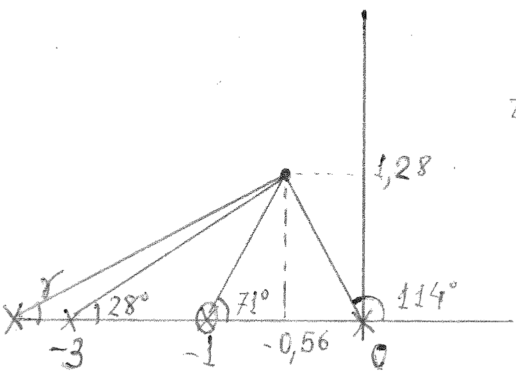
$$\left| K_c \cdot \frac{(s+0{,}56)}{(s+1{,}4)} \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \right|_{s=-0{,}56+1{,}28j} = 1 \ ;$$

CANCELACIÓN CERO-POLO

$$-114^\circ \cancel{-71^\circ} \cancel{+71^\circ} - 28^\circ - \gamma = -180^\circ$$

$$\gamma = 38^\circ$$

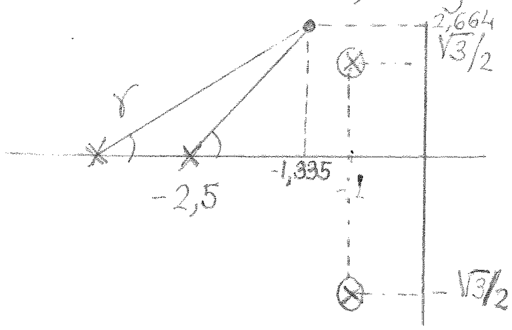
$$\tan(38^\circ) = \frac{1{,}28}{p - 0{,}56}; \quad p = 2{,}2; \quad G_c = K_c \cdot \frac{(s+1)}{(s+2{,}2)}$$



$$\left| K_c \cdot \frac{\cancel{(s+1)}}{(s+2{,}2)} \cdot \frac{1}{s\cancel{(s+1)}(s+3)} \right|_{s=-0{,}56+1{,}28j} = 1 \ ; \quad K_c \cong 8{,}14$$

④ $GH(s) = \dfrac{1}{(s+2,5)(s^2+2s+1,75)}$; $\left.\begin{array}{l} M_p(\%) = 20,78 \\ t_s = 3s \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \zeta = 0,448 \\ w_n = 2,98 \text{ rad/s} \end{array}$

$S_d = -1,335 \pm 2,664j$



$-66,38° - \gamma = -180°$

$\gamma = 113,62° (\simeq 114°)$

$\tan(66°) = \dfrac{2,664}{1,335-p}$; $p = 0,149$

$G_c(s) = K_c \cdot \dfrac{(s^2+2s+1,75)}{(s+0,149)}$

$$\left| K_c \cdot \frac{\cancel{(s^2+2s+1,75)}}{(s+0,149)} \cdot \frac{1}{(s+2,5)\cancel{(s^2+2s+1,75)}} \right|_{s=-1,335+2,664j} = 1 \;; \quad K_c \cong 8,45$$

⑤ $G(s) = \dfrac{1}{(s^2-4)} = \dfrac{1}{(s-2)(s+2)}$;

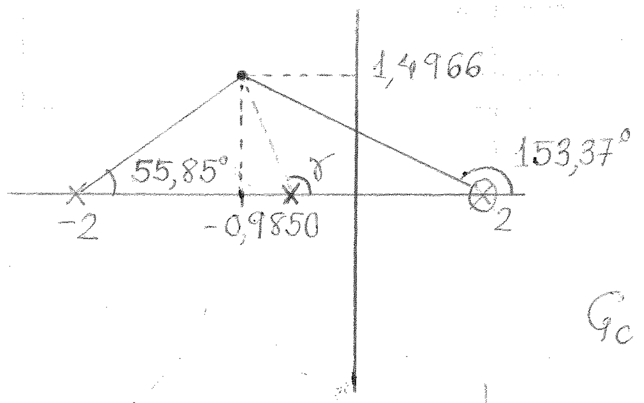
$\zeta = 0,55$

$t_p = 2,1\,s = \dfrac{\pi}{w_d} = \dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow w_n = 1,8 \text{ rad/s}$

$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$

$s^2 + 1,97s + 3,21 = 0$

$S_d = -0,9850 \pm 1,4966j$



$\cancel{-153,37°} \cancel{+153,37°} - 55,85° - \gamma = -180°$

$\gamma = 124,15°$

$\tan(55,85°) = \dfrac{1,4966}{0,985-p}$; $p = -0,03 (\simeq 0)$

$G_c(s) = K_c \cdot \dfrac{(s-2)}{s}$

$$\left| K_c \cdot \frac{\cancel{(s-2)}}{s} \cdot \frac{1}{\cancel{(s-2)}(s+2)} \right|_{s=-0,9850+1,4966j} = 1 \;; \quad K_c = 3,24$$

⑥ $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-3)}$

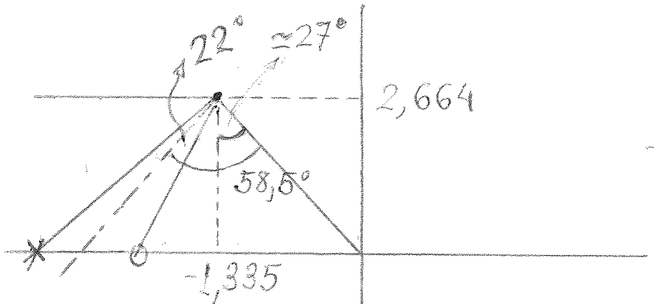
$M_p = 20{,}78\% = 100\, e^{-(\zeta w_n / w_d)\pi}$ con $w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$t_s = 3\,s = \dfrac{4}{\zeta w_n}$

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= 0{,}448 \\ w_n &= 2{,}98 \text{ rad/s}\end{aligned}\right\} \quad s_d = -1{,}335 \pm 2{,}664j$$

$$\angle \left.\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right|_{s=-1{,}335+2{,}664j} = -224{,}31^\circ$$

BISECTRIZ



$-224{,}31^\circ + \phi = -180^\circ$

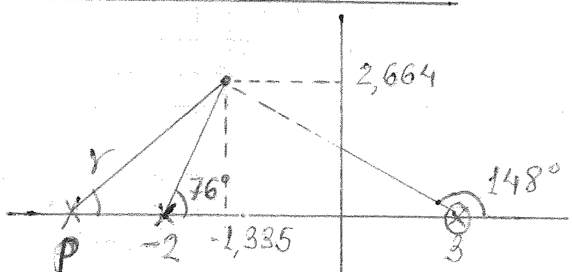
$\phi = 44{,}31^\circ \ (\simeq 44^\circ)$

$$\left.\begin{aligned}&\text{CERO: } \frac{\frac{1}{T} - 1{,}335}{2{,}664} = \tan(9{,}5^\circ)\ ; \quad \frac{1}{T} = 1{,}78 \\ &\text{POLO: } \frac{\frac{1}{\alpha T} - 1{,}335}{2{,}664} = \tan(53{,}5^\circ)\ ; \quad \frac{1}{\alpha T} = 4{,}94\end{aligned}\right\} \quad G_c = K_c \cdot \frac{(s+1{,}78)}{(s+4{,}94)}$$

CONDICIÓN DE MAGNITUD: $|G_c \cdot G| = 1$

$$\left| K_c \cdot \frac{(s+1{,}78)}{(s+4{,}94)} \cdot \frac{1}{(s+2)(s-3)} \right|_{s=-1{,}335+2{,}664j} = 1\ ; \quad K_c = 23{,}1$$

CANCELACIÓN CERO-POLO



$\cancel{-148^\circ} + \cancel{148^\circ} - 76^\circ - \gamma = -180^\circ$

$\gamma = 104^\circ$

$\tan(76^\circ) = \dfrac{2{,}664}{1{,}335 - p}\ ; \quad p = 0{,}67$

$G_c(s) = K_c \cdot \dfrac{(s-3)}{(s+0{,}67)}$

$$\left| K_c \cdot \frac{\cancel{(s-3)}}{(s+0{,}67)} \cdot \frac{1}{(s+2)\cancel{(s-3)}} \right|_{s=-1{,}335+2{,}664j} = 1\ ; \quad K_c = 7{,}54$$

⑦ $G(s) = \dfrac{K}{(s+2)^3}$

RAÍCES EN EL EJE IMAGINARIO: CRITERIO DE ROUTH (ALGÚN FACTOR DE LA PRIMERA COLUMNA IGUAL A CERO). ECUACIÓN CARACTERÍSTICA:

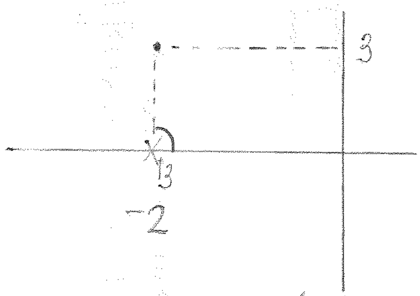
$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + K$

s^3	1	12
s^2	6	$(8+K)$
s^1	$\dfrac{72-8-K}{6}$	0
s^0	$8+K$	

$\rightarrow K = 64$ (PARA CUMPLIR CON EL L.G.R SUMINISTRADO)

$$\left.\begin{aligned} M_p(\%) &= 12{,}3 \longrightarrow \zeta = 0{,}555 \\ t_s(5\%) &= 2s \longrightarrow w_n = 3{,}6\ rad/s \end{aligned}\right\} S_d = -2 \pm 3j$$

COMPROBAR QUE S_d NO PERTENECE AL L.G.R.



$-90° - 90° - 90° \neq \pm 180°(2k+1)$

NO PERTENECE

PD IDEAL: $G_c(s) = K_D(s+z)$; $-270° + \gamma = -180°$; $\gamma = 90° \rightarrow z = +2$

$$\left| \frac{64}{(s+2)^{\cancel{3}\,2}} K_D \cancel{(s+2)} \right|_{S_d = -2+3j} = 1 \longrightarrow K_D = 0{,}421875$$

$G_c(s)G(s) = \dfrac{27}{(s+2)^2} \rightarrow K_p = \lim\limits_{s \to 0} G_c(s)G(s) = 6{,}75 < K_{p\,REQUERIDO}$ (19)

PI MODIFICADO $\quad G_{PI}(s) = K_I \dfrac{s+z}{s+p}$

CERO: $z = 0{,}1 \times 2 = 0{,}2$

POLO: $p = \dfrac{z}{\beta} = 0{,}07105$

$\beta = \dfrac{K_{p\,REQUERIDO}}{K_{p\,SIN\,REGULAR}} = \dfrac{19}{6{,}75} = 2{,}8148$

$K_{p\,REQUERIDO} = \lim\limits_{s \to 0} G_c(s)G(s) =$

$= \dfrac{1}{1+K_p} \leq 0{,}05$;

$K_p = 19$

7 CONTINUACIÓN

$$\left| K_I \cdot \frac{(s+0,2)}{(s+0,07)} \right|_{s_d=-2+3j} = K_I \quad ; \quad -5^\circ < \left. \angle \frac{(s+0,2)}{(s+0,07)} \right|_{s_d=-2+3j} < 0^\circ$$

$$K_I \simeq 1 \qquad\qquad -1,7766^\circ$$

$$G_{PI}(s) = K_I \cdot \frac{(s+z)}{(s+p)} = \frac{(s+0,2)}{(s+0,07)}$$

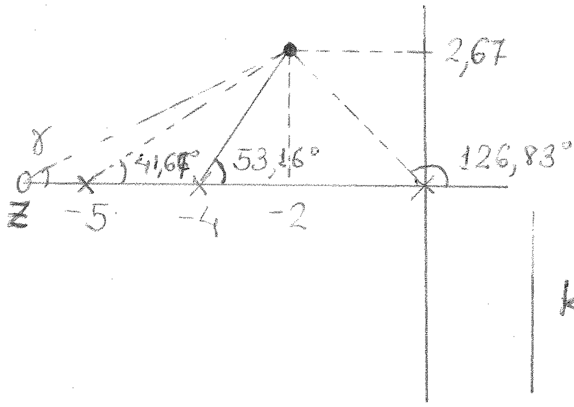
$$G_{TOTAL}(s) = G(s) \cdot G_c(s) \cdot G_{PI}(s) = \frac{27(s+0,2)}{(s+2)^2(s+0,07)}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G_{TOTAL}(s) = 38,57 > 19 \quad (\text{CUMPLE})$$

8 $G(s) = \dfrac{1}{s(s+4)(s+5)}$ $\left\{ \begin{array}{l} M_p = 9{,}5\% \longrightarrow \zeta = 0{,}6 \\ t_s = \dfrac{4}{\zeta w_n} = 2s \rightarrow w_n = 3{,}3 \text{ rad/s} \end{array} \right.$

POLOS DOMINANTES $S_d = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -2 \pm 2{,}67j$

$$G_c(s) = K_D(1 + T_D s) = K_D T_D\left(s + \frac{1}{T_D}\right) = K_R\left(s + \frac{1}{T_D}\right)$$



$\gamma - 41{,}67° - 53{,}16° - 126{,}83° = -180°$

$\gamma - 221{,}66° = -180°$; $\gamma = 41{,}66°$ ($z = -5$)

$$\left| K_R \cdot \frac{1}{s(s+4)\cancel{(s+5)}} \cdot \cancel{(s+5)} \right| = 1 \Rightarrow K_R = 11{,}1289$$

NUEVA $G(s) = \dfrac{11{,}1289 \cancel{(s+5)}}{s(s+4)\cancel{(s+5)}} = \dfrac{11{,}1289}{s(s+4)}$

ERROR DE VELOCIDAD REQUERIDO $e_{ss} \leq 1/3$

$e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} \leq \dfrac{1}{3}$; $K_v \geq 3$ $\longleftrightarrow$ $G_c(s) = \dfrac{K_c\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)}$

POLOS DOMINANTES DE $G(s)$; $S_d = -2 \pm 2{,}67j$

$\left| K_c \cdot \dfrac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} \right|_{S_d} = K_c$; $-5° < \angle \left.\dfrac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)}\right|_{S_d} < 0° = -0{,}4557°$

CERO: $Z = \dfrac{1}{T} = 0{,}1 \times 4$

POLO: $p = \dfrac{Z}{\beta} = 0{,}371$

$\beta = \dfrac{K_{v\,REQUERIDO}}{K_{v\,SIN\,REGULAR}} = \dfrac{3}{2{,}782225} \simeq 1{,}078$

$K_c = 0{,}9952 \simeq 1$

$$G_{S_{TOTAL}}(s) = \frac{11{,}1289 \cdot (s+5)(s+0{,}4)}{s(s+4)(s+5)(s+0{,}371)}$$

9) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+2)}$ | $M_p = 20\% = 100\, e^{-(\zeta w_n / w_d)\pi}$; $w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$G_c(s) = K_c\beta\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c\cdot\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$$

$\zeta = 0{,}4559$

ENTRADA RAMPA: $r(t) = t\cdot u(t) \longrightarrow R(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{\left(1 + K_c\beta\cdot\frac{(Ts+1)}{(\beta Ts+1)}\cdot\frac{K}{s(s+2)}\right)}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2}{K_c\beta K} \leq 0{,}05$$

CON $\zeta = 0{,}2465 \simeq 0{,}25$, AJUSTAMOS K. $\quad K_v \geq 20$ (REQUERIDO)

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA: $s^2+2s+K=0$; $s^2+2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$

$$K_{v\,SINREGULAR} = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \cancel{s}\cdot\frac{K}{\cancel{s}(s+2)} = \frac{K}{2} = 2{,}4 \qquad \cancel{2}\zeta w_n = \cancel{2} \rightarrow w_n = \frac{1}{\zeta} = 2{,}2\ \text{rad/s}$$

$w_n^2 = K = 4{,}81$

$$\beta = \frac{K_{v\,REQUERIDO}}{K_{v\,SINREGULAR}} = \frac{20}{2{,}4} = 8{,}3$$

POLOS DOMINANTES DE $G(s)$: $s^2+2s+4{,}81 = 0$ } $s_d = -1 \pm 1{,}951j$

• EL ÁNGULO DE LA RED DE ATRASO HA DE SER PEQUEÑO ($\simeq 5°$), DE AHÍ QUE EL POLO Y EL CERO SE UBIQUEN RELATIVAMENTE CERCA EL UNO DEL OTRO, Y CERCA DEL ORIGEN DEL PLANO S.

$$\left| K_c\cdot\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\right|_{s_d} = K_c \quad ; \quad -5° < \angle\left.\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\right|_{s_d} < 0° = -4{,}3°$$

CERO: $z = \dfrac{1}{T} = 0{,}1\times 2$
POLO: $p = \dfrac{z}{\beta} = 0{,}024$
} $K_c = 0{,}9666 (\simeq 1)$

$$G_c(s) = \underset{\Downarrow\atop 1}{K_c}\cdot\frac{(s+0{,}2)}{(s+0{,}024)} \Rightarrow \text{PI modificado}$$

(10) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+3)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \zeta = 0{,}5 \\ e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} \leq 0{,}04 \Rightarrow K_{v\,REQUERIDO} \geq 25 \end{array} \right.$

CON $\zeta = 0{,}5$, AJUSTAMOS $K = 1{,}85$, SIENDO LOS POLOS DOMINANTES

$S_d = -0{,}374 \pm 0{,}654j$

$$K_{v\,SINREGULAR} = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \cancel{s} \cdot \frac{K}{\cancel{s}(s+1)(s+3)} = \frac{K}{3} = \frac{25}{3}\ (\simeq 8{,}3)$$

$$\beta = \frac{K_{v\,REQUERIDO}}{K_{v\,SINREGULAR}} = \frac{25}{25/3} = 3 \ ; \ G_c(s) = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CERO: } z = \dfrac{1}{T} = 0{,}1 \times 1 \\ \text{POLO: } p = \dfrac{z}{\beta} = 0{,}03 \end{array} \right\} \quad = K_c \cdot \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}03)}$$

$$\left| K_c \cdot \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}03)} \right|_{S_d} = K_c \Rightarrow K_c = 0{,}9596\ (\simeq 1)$$

$$-5^\circ < \angle \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}03)} < 0^\circ \Rightarrow \simeq -5^\circ \text{ (DEMASIADO AJUSTADO)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CERO: } z = \dfrac{1}{T} = 0{,}05 \\ \text{POLO: } p = \dfrac{z}{\beta} = 0{,}016 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K_c = 0{,}9789\ (\simeq 1) \\ \angle = -2{,}342^\circ \end{array}$$

$$G_c = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = 1 \cdot \frac{(s+0{,}05)}{(s+0{,}016)}$$

(11) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+4)}$ $\left\{ \begin{array}{l} M_p(\%) = 4{,}32 \rightarrow \xi = 0{,}707 \\ t_s = 0{,}42\,s \rightarrow w_n = 13{,}47 \text{ rad/s} \end{array} \right.$

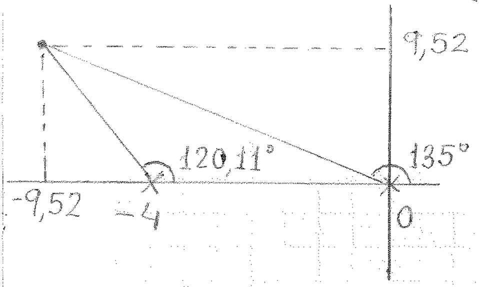
POLOS DOMINANTES: $s_{d_\ell} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1} = -9{,}52 \pm 9{,}52j$

• AJUSTAR K PARA QUE $\xi = 0{,}707$; $s^2 + 4s + K = 0 \rightarrow w_n = 2\sqrt{2}$ rad/s

$s_d = -2 \pm 2j$

$$\left| \frac{K}{s(s+4)} \right|_{s_d = -2+2j} = 1 \Rightarrow K = 8$$

• COMPROBAR QUE s_{d_ℓ} NO ESTÁN CONTENIDOS EN EL L.G.R.

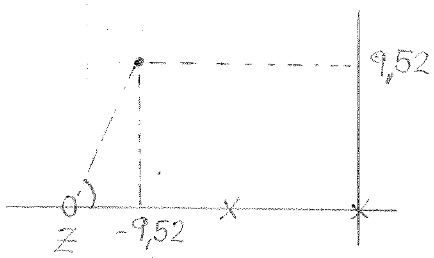


$-120{,}11° - 135° = -255{,}11° \neq \pm(2n+1)180°$

NO ESTÁN CONTENIDOS EN EL L.G.R.

• PD IDEAL: $G_c(s) = K_D(s+Z)$

$$-255{,}11° + \gamma = -180° \Rightarrow \gamma = 75{,}11°$$



$\tan\gamma = \tan(75{,}11°) = \dfrac{9{,}52}{Z - 9{,}52}$; $Z = 12{,}05$

$$\left| K_D \cdot \frac{(s+12{,}05)}{s(s+4)} \cdot 8 \right|_{s_{d_\ell} = -9{,}52+9{,}52j} = 1 \Rightarrow K_D = 1{,}88$$

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{15{,}04 \times (s+12{,}05)}{s(s+4)}$$

ERROR DE POSICIÓN $< 0{,}1\% \longrightarrow K_p > 999$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{15{,}04 \times (s+12{,}05)}{s(s+4)} \rightarrow \infty$$

Problema 12 — Solución

Observe que:

$$G_c(j\omega)\,G(j\omega) = K_c\,\alpha\left(\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\right)\frac{0,2}{(j\omega)^2(0,2j\omega+1)}$$

Se selecciona la frecuencia de cruce de ganancia para calcular el ancho de banda y el margen de fase.

$$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$\left.\angle G(j\omega)\right|_{\omega = 1\text{ rad/s}} = 191,31^\circ$$

Por tanto, la red de adelanto debe aportar una fase de: $50^\circ + 11,31^\circ = 61,31^\circ$ en $\omega = 1$

$$\operatorname{sen}\phi_M = \operatorname{sen} 61,31^\circ = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0,8772$$

$$\longrightarrow \alpha = 0,06541$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \frac{3,910}{T} = 1 \rightarrow T = 3,91$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{3,91} = 0,2558$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{0,2558}{0,06541} = 3,91$$

$$G_c(j\omega)\,G(j\omega) = 0{,}06541\,K_c\,\frac{3{,}91 j\omega + 1}{0{,}2558 j\omega + 1} \cdot \frac{0{,}2}{(j\omega)^2(0{,}2 j\omega + 1)}$$

La curva de magnitud debe elevarse 2,306 dB para que la magnitud sea igual a 0 dB en $\omega = 1$ rad/seg. Establecemos

$$20 \log 0{,}06541\,K_c = 2{,}306$$

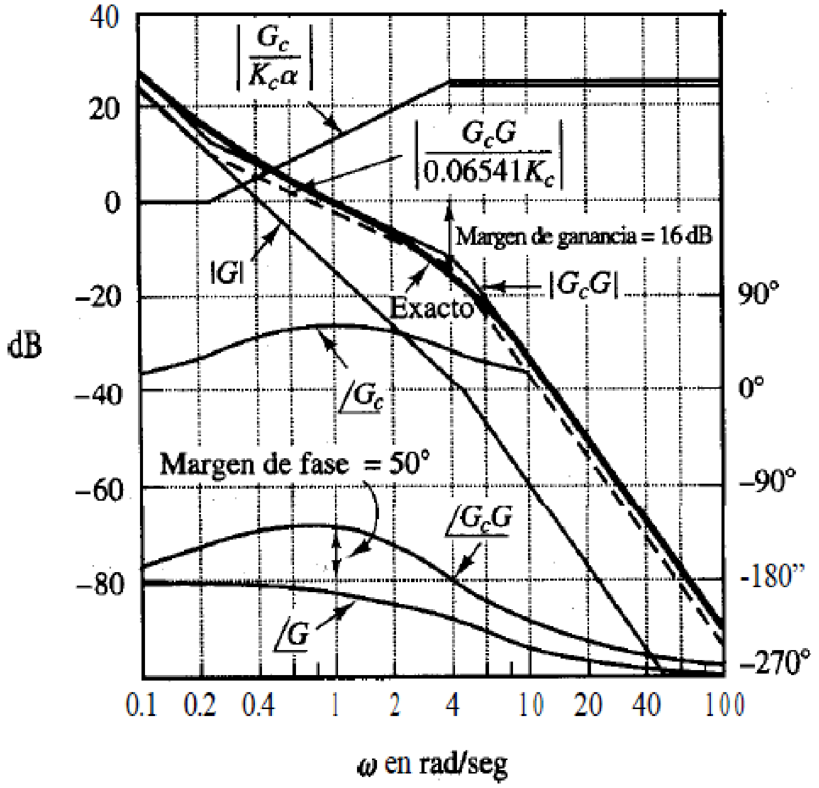
Esto hace que $G_c(j\omega) \cdot G(j\omega) / (0{,}06541\,K_c)$ tenga magnitud igual a 0 dB en $\omega = 1$ rad/seg.

La curva de magnitud y fase del sistema compensado muestra que el sistema tiene un margen de fase de 50° y un margen de ganancia de 16 dB. Por tanto, se satisfacen las especificaciones de diseño.

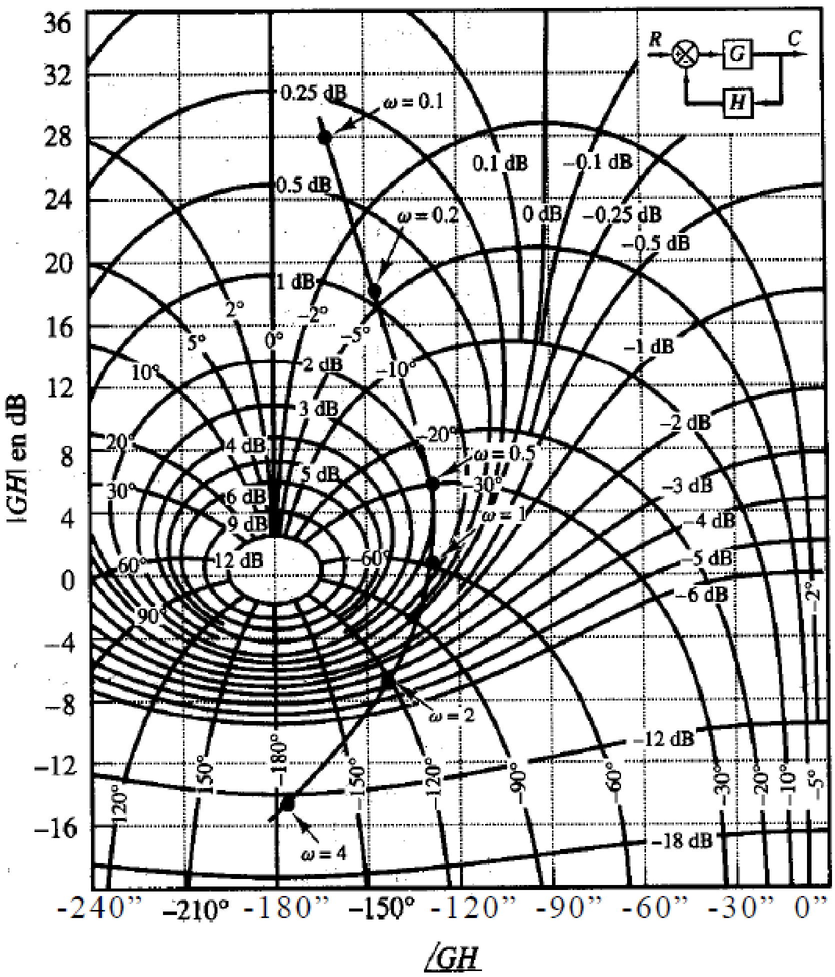
A partir de la carta de Nichols, correspondiendo $G_c(j\omega)\,G(j\omega)$ se calcula que el ancho de banda es aproximadamente 1,9 rad/seg. Los valores de M_r y ω_r son los siguientes:

$M_r = 2{,}13$ dB

$\omega_r = 0{,}58$ rad/seg



40
20
0
-20
-40
-60
-80
dB
$\left|\frac{G_c}{K_c\alpha}\right|$
$\left|\frac{G_cG}{0.06541K_c}\right|$
Margen de ganancia = 16 dB
$|G|$
Exacto
$|G_cG|$
$\angle G_c$
Margen de fase = 50°
$\angle G_cG$
$\angle G$
90°
0°
-90°
-180°
-270°
0.1 0.2 0.4 1 2 4 10 20 40 100
ω en rad/seg



$|GH|$ en dB
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
0.25 dB
$\omega = 0.1$
0.5 dB
$\omega = 0.2$
0.1 dB
-0.1 dB
0 dB
-0.25 dB
-0.5 dB
1 dB
2 dB
3 dB
4 dB
5 dB
6 dB
9 dB
12 dB
-1 dB
-2 dB
-3 dB
-4 dB
-5 dB
-6 dB
-12 dB
-18 dB
$\omega = 0.5$
$\omega = 1$
$\omega = 2$
$\omega = 4$
R
G
C
H
-240° -210° -180° -150° -120° -90° -60° -30° 0°
$\angle GH$

Problema 13 – Solución

Usamos un compensador de la forma:

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

Defina

$$K_c\beta = K$$

También defina

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que cumpla con la constante de error estático de velocidad requerida. Por tanto,

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G_1(s) = \lim_{s\to 0} sG_1(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)} = K = 5$$

0 bien

$$K = 5$$

Con $K = 5$, el sistema compensado satisface el requerimiento de desempeño en estado estable.

A continuación graficamos las trazas de Bode de

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

La curva de magnitud y la curva del ángulo de fase de $G_1(j\omega)$ aparecen en la figura 9-16. A partir de estas trazas, vemos que el margen de fase es de $-20°$, lo cual significa que el sistema es inestable.

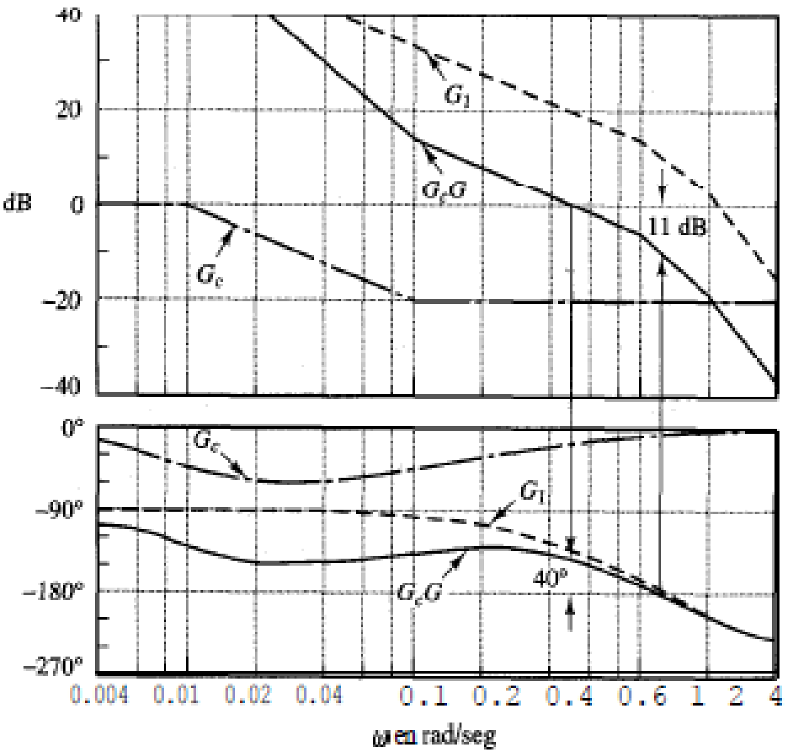
Considerando que la adición de un compensador de atraso modifica la curva de fase de las trazas de Bode, debemos permitir entre 5 y 12° a fin de que el margen de fase especificado compense la modificación de la curva de fase. Dado que la frecuencia correspondiente a un margen de fase de 40° es de 0.7 rad/seg, la nueva frecuencia de cruce de ganancia (del sistema compensado) debe seleccionarse cercana a este valor. Con el fin de evitar las constantes de tiempo muy grandes para el compensador de atraso, debemos elegir la frecuencia de esquina $\omega = 1/T$ (que corresponde al cero del compensador de atraso) como 0.1 rad/seg. Dado que esta frecuencia de esquina no está muy abajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, la modificación de la curva de fase tal vez no sea pequeña. Por tanto, agregamos cerca de 12° al margen de fase proporcionado, como una tolerancia para considerar el ángulo de atraso introducido mediante el compensador de atraso. El margen de fase requerido es ahora de 52°. El ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto no compensada es de $-128°$ en la cercanía de $\omega = 0.5$ rad/seg. Por tanto, tomamos la nueva frecuencia de cruce de ganancia como de 0.5 rad/seg. Para bajar la curva de magnitud hasta 0 dB en esta nueva frecuencia de cruce de ganancia, el compensador de atraso debe proporcionar la atenuación necesaria que, en este caso, es de -20 dB. Por tanto,

$$20\log\frac{1}{\beta} = -20$$

o bien,

$$\beta = 10$$

La otra frecuencia de esquina $\omega = 1(\beta T)$, que corresponde al polo del compensador de atraso, se determina, entonces, como



$$\frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/seg}$$

Por tanto, la función de transferencia del compensador de atraso es

$$G_c(s) = K_c(10)\,\frac{10s + 1}{100s + 1} = K_c\,\frac{s + \frac{1}{10}}{s + \frac{1}{100}}$$

Dado que la ganancia K se determinó como 5 y β como 10, tenemos que

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = \frac{5(10s + 1)}{s(100s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

La figura 9-16 también muestra las curvas de magnitud y de ángulo de fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$.

El margen de fase del sistema compensado es de alrededor de 40°, que es el valor requerido. El margen de ganancia es de aproximadamente 11 dB, valor bastante aceptable. La constante de error estático de velocidad es de 5 seg^{-1}, tal como se requiere. Por tanto, el sistema compensado satisface los requerimientos en estado estable y la estabilidad relativa.

observe que esta nueva frecuencia de cruce de ganancia disminuyó de cerca de 2 a 0.5 radlseg. Esto significa que el ancho de banda del sistema se redujo.

Para apreciar mejor los efectos de la compensación de atraso, la figura 9-17 muestra las trazas de la magnitud logarítmica contra la fase del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ y del sistema compensado $G_c(j\omega)G(j\omega)$. La traza de $G_1(j\omega)$ muestra claramente que el sistema no compensado es inestable. Al agregar el compensador de atraso el sistema se estabiliza. La traza de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ es tangente al lugar geométrico M = 3 dB. Por tanto, el valor del pico de resonancia es de 3 dB, o 1.4, y este pico ocurre en ω = 0.5 radlseg.

Los compensadores diseñados con métodos diferentes o por diseñadores distintos (incluso mediante el mismo enfoque) pueden resultar muy diferentes. Sin embargo, cualquier sistema bien diseñado producirá un desempeño transitorio y en estado estable similar. La mejor entre muchas alternativas se elige a partir de la consideración económica de que las constantes de tiempo del compensador de atraso no deben ser demasiado grandes.

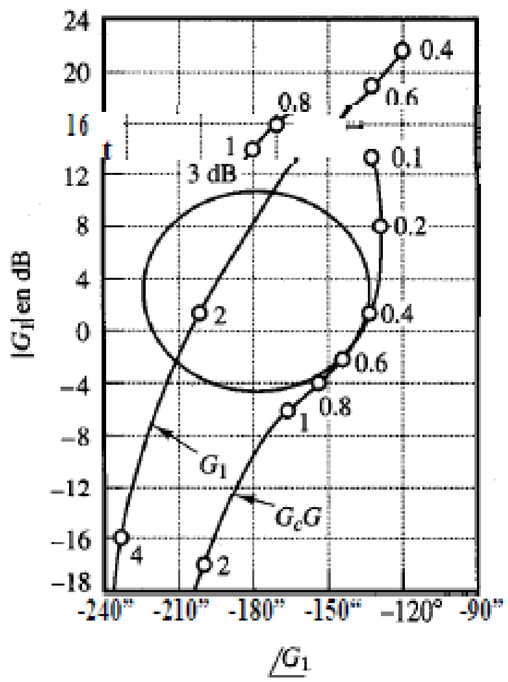
Por último examinaremos la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema compensado y del sistema no compensado original. Las funciones de transferencia en lazo cerrado de los sistemas compensado y no compensado son

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50s + 5}{50s^4 + 150.5s^3 + 101.5s^2 + 51s + 5}$$

y

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{0.5s^3 + 1.5s^2 + s + 1}$$

respectivamente. El programa MATLAB 9-2 producirá las respuestas escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado. Las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria resultantes aparecen en las figuras 9-18 y 9-19, respectivamente. A partir de las curvas de respuesta encontramos que el sistema diseñado satisface las especificaciones proporcionadas y que es satisfactorio.



Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado