Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ____________________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **120 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (20 puntos) Considere el sistema de control realimentado mostrado en la figura 1.

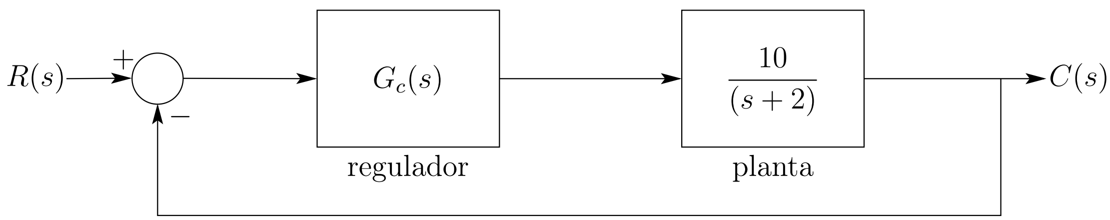

Figura 1: Sistema de control realimentado.

Si el sistema de control debe cumplir las siguientes especificaciones:

- Error en régimen permanente igual o inferior al 5 % de la entrada, cuando esta atiende a un escalón unitario,
- margen de fase de al menos 98°,

diseñe el regulador $G_c(s)$ que posibilita el cumplimiento de los requisitos especificados.

Notas:

En el desarrollo del ejercicio utilice papel semi-logarítmico y justifique las acciones adoptadas, así como las expresiones matemáticas utilizadas en la implementación del diseño con objeto de alcanzar la máxima puntuación del problema.

2. (40 puntos) Determine la solución, en forma cerrada, de la transformada z de las siguientes funciones $f(k)$.

   (a) (20 puntos) $f(k) = \dfrac{2^k}{(k-1)!}$, para $k \geqslant 0$. **<u>Nota</u>:** $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{u^n}{n!}$.

   (b) (20 puntos) La señal $f(k)$ representada en la figura 2.

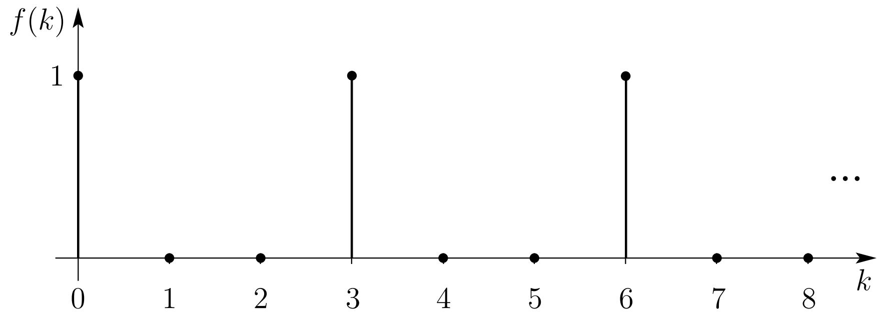

Figura 2: Señal en tiempo discreto $f(k)$.

3. (20 puntos) Sea el lugar geométrico de un sistema de control en tiempo discreto mostrado en la figura 3.

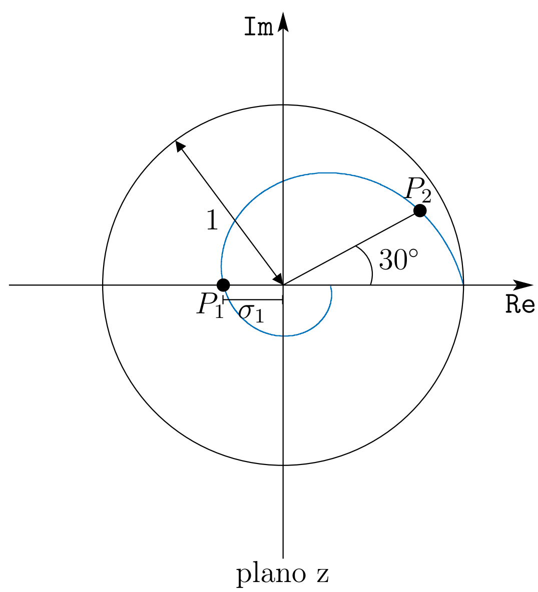

Figura 3: Lugar geométrico del sistema considerado.

A tenor de la figura 3, considerando $\sigma_1 = 0,0432$ y un período de muestreo T de 1 s, determine el sobreimpulso máximo, en porcentaje, que experimenta la respuesta del sistema ante una entrada escalón unidad y la variación a la que se ve sometido el ancho de banda cuando se modifica el punto de trabajo, pasando del modo de operación P_1 al modo P_2.

4. (20 puntos) Sea un sistema $G(z)$, cuyo diagrama de Bode se muestra en la figura 4. Si se opera con un ángulo de fase de $\angle G(z) = -216°$, diseñe un regulador PID, $G_R(z)$, para un período de muestreo T de 0,5 s, de forma que el margen de fase del sistema de control, con realimentación unitaria, ascienda a 24°.

   Notas:

   $K_1 = K_p + \frac{K_d}{T} + K_i T$; $K_2 = K_i T - \frac{2K_d}{T}$; $K_3 = \frac{K_d}{T} - K_p$.

   Considere la relación $T_i = \alpha T_d$, donde el factor α identifica, de acuerdo con la figura 5, la relación existente entre el período de oscilación y el período de muestreo T, conforme a la ubicación de las raíces dominantes (indicadas con el símbolo $\times$) de la figura 5.

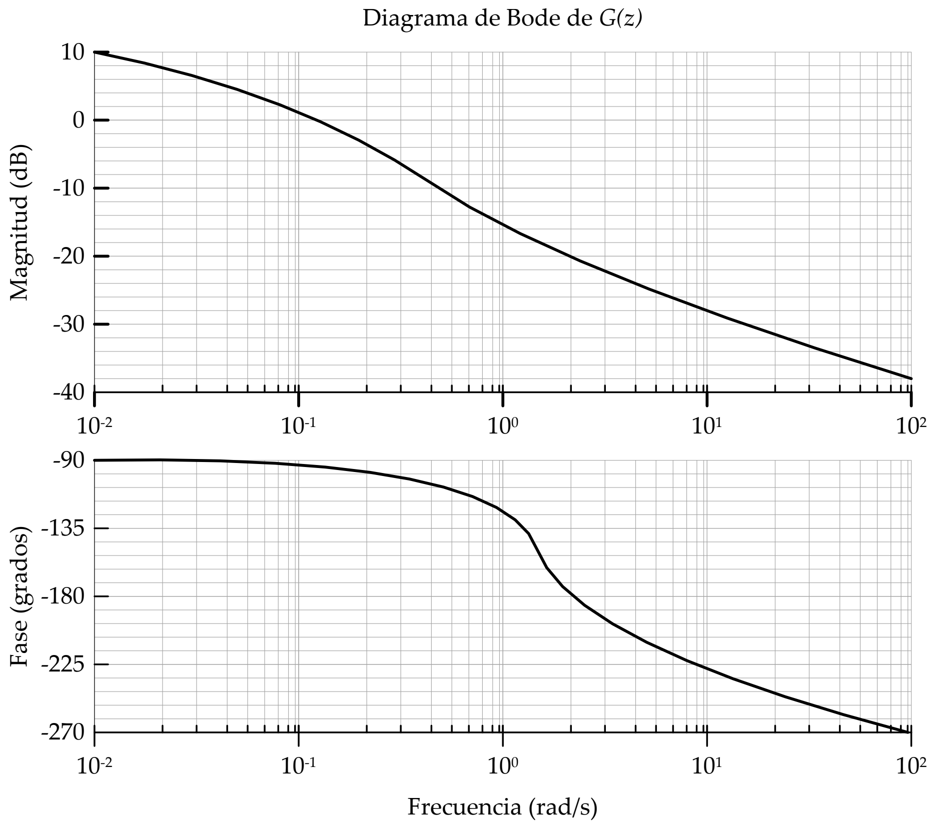

Figura 4: Diagrama de Bode de $G(z)$.

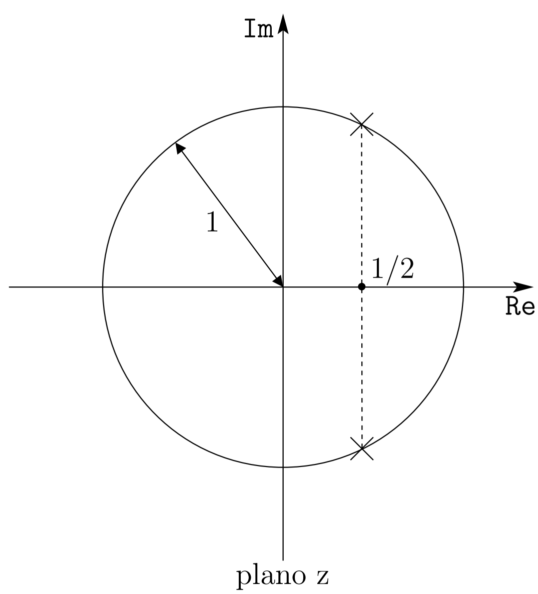

Figura 5: Lugar geométrico del sistema considerado para computar el valor de α.

Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ____________________

La función de transferencia del compensador por retardo de fase se puede expresar de las siguientes maneras:

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\omega_1}{s+\frac{\omega_1}{\alpha}} = K_c\alpha\frac{s+\omega_1}{\alpha s+\omega_1} \qquad \alpha > 1$$

Haciendo $K = K_c\alpha$ y definiendo $G_1(s) = KG(s)$ resulta:

$$G_1(s) = K\frac{10}{s+2} = \frac{10K}{s+2}$$

1. Se determina la ganancia K para satisfacer el requerimiento del coeficiente de error en régimen permanente

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \Rightarrow k_p = \frac{1}{0{,}05} - 1 = 19$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = \lim_{s\to 0}\frac{10}{s+2}\frac{K_c(s+\omega_1)}{s+\frac{\omega_1}{\alpha}} = 5K_c\alpha = 5K = 19 \Rightarrow K = 3{,}8$$

2. Usando la ganancia K se dibuja el diagrama de Bode de $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$, utilizando el papel semi-logarítmico dado y se calcula el margen de fase y de ganancia del sistema sin compensar

$$KG(jw) = \frac{38}{j\omega+2}$$

Su representación en diagramas de Bode se indica en la figura 1.

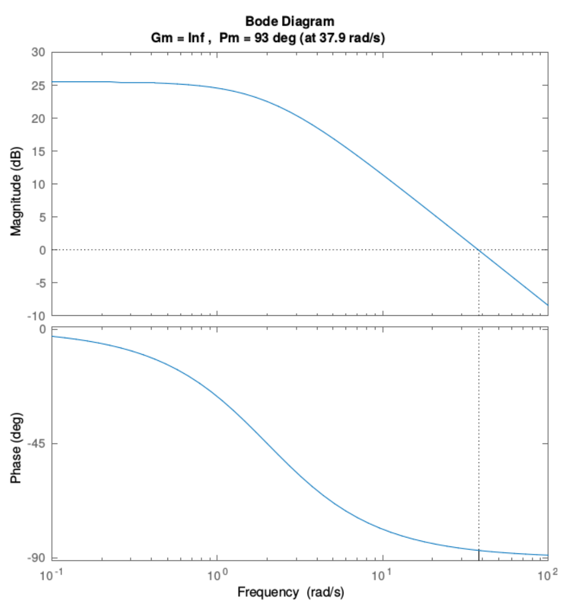

Figura 1: Diagrama de Bode de la función KG

El margen de fase es aproximadamente de $MF = 90^o$ y el margen de ganancia $MG = \infty$ dB, por lo que no se cumplen los requisitos deseados.

3. Si las especificaciones de MG o MF no se cumplen, se halla la frecuencia donde el margen de fase es igual al especificado más un margen, entre 5 y 12^o, que se agrega para compensar el retardo de fase que introduce la red de retardo. Se toma esta frecuencia como nueva frecuencia de transición de ganancia.

   El margen de fase de 98^o en la curva de KG se tiene a la frecuencia $10 rad/s$. Para evitar que las constantes de tiempo (inversas a ω_i) sean demasiado grandes, interesa que el valor de ω_1 sea grande. Por ello, al MF se le suman 12^o resultando un $MF = 110^o$ por lo que la fase de $KG(j\omega)$ tendría que ser:

$$MF = 110^o = \underline{/KG} + 180^o \qquad \underline{/KG} = -70^o$$

   y este valor se alcanza aproximadamente en $\omega_T = 10 rad/s$.

4. El cero de la red de retardo ω_1 se toma entre una octava y una década más baja que la frecuencia anterior. En nuestro caso, una década mas baja:

$$\frac{\omega_T}{2} = 5 > \omega_1 > \frac{\omega_T}{10} = 1 \qquad \omega_1 = 1 rad/s$$

5. El valor de α se calcula viendo la atenuación necesaria para reducir la curva de amplitud a 0 dB en la nueva frecuencia de transición de ganancia. Esta atenuación es $20 \log \frac{1}{\alpha} = -20 \log \alpha$. Conociendo α se sabe el polo de la red de retardo $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\alpha}$

   En $\omega_T = 10$ rad/s el valor de la ganancia de $KG(j\omega)$ es 11 dB, por lo que para obligar a que pase por 0 dB se deben atenuar -11 dB:

$$-20 \log \alpha = -11 \qquad \alpha = 3{,}54$$

   y el polo del compensador está en $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\alpha} = 0{,}2857 rad/s$.

6. Se determina la ganancia del compensador $K_c = \frac{K}{\alpha}$

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{3{,}8}{3{,}54} = 1{,}073$$

   La compensador de retardo así determinado es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_1}{s + \frac{\omega_1}{\alpha}} = 1{,}073 \frac{s+1}{s + 0{,}2857}$$

En la figura 2 se ha representado el diagrama de Bode de la ganancia de lazo del sistema compensado cuya función de transferencia es:

$$G_c(s)G(s) = 1{,}073 \frac{s+1}{s + 0{,}2857} \frac{10}{s+2}$$

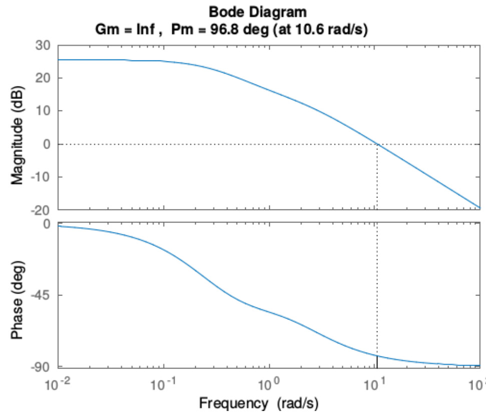

Figura 2: Diagrama de Bode de la función G_cG

Obsérvese que el efecto del compensador de retardo en alta frecuencia es despreciable. El margen de fase del sistema compensado está alrededor de 98^o que es el valor requerido y el margen de ganancia sigue siendo ∞dB. El error en régimen permanente es inferior al 5 % por lo que se cumplen todas las especificaciones.

Es importante notar que la frecuencia de transición de ganancia disminuye de 40 a 10 rad/s por lo que se reduce el ancho de banda y con ello la respuesta transitoria del sistema compensado es más lenta que cuando está sin compensar.

En la figura 3 puede verse la respuesta al escalón, en el dominio del tiempo, del sistema compensado.

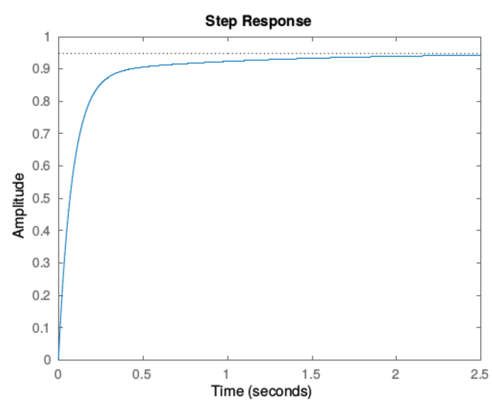

Figura 3: Respuesta al escalón del sistema compensado

La compensación por retardo lo que hace es introducir un polo antes que el primer polo de la planta G(s). Por ello, se pierde ancho de banda, no se pierde ganancia en bajas frecuencias y se atenúan las altas provocando una disminución de ruido. En resumen, mejora el régimen permanente pero empeora el régimen transitorio debido al reducido ancho de banda.

Como el compensador de retardo tiende a integrar la señal de entrada, actúa, aproximadamente, como un control proporcional-integral (PI).

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

2

a)

$$f(k) = k \cdot \frac{2^k}{k!} = k \cdot g(k)$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot z^{-1})^k}{k!} = e^{2 \cdot z^{-1}}$$

$$F(z) = -z \cdot \frac{d}{dz} e^{2z^{-1}} = \frac{2}{z} \cdot e^{2/z}$$

b)

$$F(z) = 1 + z^{-3} + z^{-6} + z^{-9} + \dots$$

$$= 1 + z^{-3}\left(1 + z^2 + z^3 + \dots\right)$$

$$= 1 + z^{-3}\left(1 + z^2\left(1 + z + z^2 + \dots\right)\right)$$

$$= 1 + z^{-3}\left(1 + \frac{z^2}{1-z}\right)$$

$$= 1 + z^{-3} + \frac{z^{-1}}{1-z}$$

$$= \frac{z^3 + 1 + z^2}{z^3(1-z)} = \frac{1 + z^2 + z^3}{z^3(1-z)}$$

$$\frac{2}{z} = \frac{-2}{z^2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \cos\left(K \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

$$|z| = e^{\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{W_d}{W_s}\right)} \; ; \quad \angle z = 2\pi \frac{W_d}{W_s}$$ (3)

$$\frac{W_d}{W_s} = 0.5 \; ; \quad |z| = 0.0432 \rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_p(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \pi} = 4{,}3214\%$$

$$\Delta BW \simeq W_n$$

EN P_1: $W_{d_1} = 0.5 \cdot W_s = 0.5 \cdot 2\pi = \pi = W_{n_1} \underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}}_{\sqrt{2}/2}$

$$W_{n_1} = 4{,}4429 \text{ rad/s}$$

EN P_2: $W_{d_2} = \frac{1}{12} \cdot W_s = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \pi = W_{n_2} \underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}}_{\sqrt{2}/2}$

$$W_{n_2} = 0{,}7405 \text{ rad/s}$$

$\Delta BW_1 = 4{,}4429$

$\Delta BW_2 = 0{,}7405$

$$\Delta BW = \frac{\Delta BW_2 - \Delta BW_1}{\Delta BW_1} \times 100$$

$$= -83{,}33\%$$

Universidad de Alcalá

Apellidos: | Pág.:

Nombre: | Fecha:

Titulación:

Asignatura: | Curso / grupo:

4

$$z = e^{sT} = e^{-\xi w_n T} \cdot e^{\pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}\, T} = 1 \cdot e^{\pm j w_n \cdot 0,5}$$

$$z_d = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j = 1 \angle 60^\circ$$

$$w_n = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot T_s = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{3 \cdot 2\pi}{\pi} = \frac{T}{T_s} = 6$$

$$\angle G_c(jw_1) = -180^\circ + MF - \angle G(jw_1) = -180^\circ + 24^\circ + 216^\circ = 60^\circ$$

EN $w_1 = 6$ rad/s

$$|G(jw_1)| = -26 \text{ dB}$$

EN VALORES ABSOLUTOS 0,05

$$|G_c(jw_1)| = \frac{1}{|G(jw_1)|} = 20$$

$$\begin{cases} K_p = |G_c(jw_1)| \cos \angle G_c(jw_1) = 10 \\ K_p \left(w_1 T_D - \dfrac{1}{w_1 T_i} \right) = |G_c(jw_1)| \cdot \operatorname{sen} \angle G_c(jw_1) = 10\sqrt{3} \end{cases}$$

$$w_1 T_D - \frac{1}{w_1 T_i} = \sqrt{3} \quad ; \quad \text{Si } T_i = \alpha T_D = 6 \cdot T_D$$

$$w_1^2 \alpha T_D^2 - \sqrt{3}\, \alpha w_1 T_D - 1 = 0$$

$$216\, T_D^2 - 62,354\, T_D - 1 = 0$$

$$\cancel{T_D = -0,0152}$$

$$T_D = 0,3039$$

$$T_i = \alpha T_D = 1,8234$$

$$K_D = K_p T_D = 3,0390$$

$$K_i = K_p / T_i = 5,4843$$

$$K_1 = K_p + \frac{K_D}{T} + K_i T = 18,8201$$

$$K_2 = K_i T - \frac{2 K_D}{T} = -9,4139$$

$$K_3 = \frac{K_D}{T} - K_p = -3,9220$$

$$G_R(z) = \frac{K_1 + K_2 z^{-1} + K_3 z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$