Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ____________________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (40 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 1. Diseñe un controlador digital $G_D(z)$, y represente gráficamente la señal de salida $c(k)$ resultante, de forma que la respuesta en lazo cerrado presente un tiempo de establecimiento mínimo, con un error en régimen permanente nulo y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada escalón unidad.

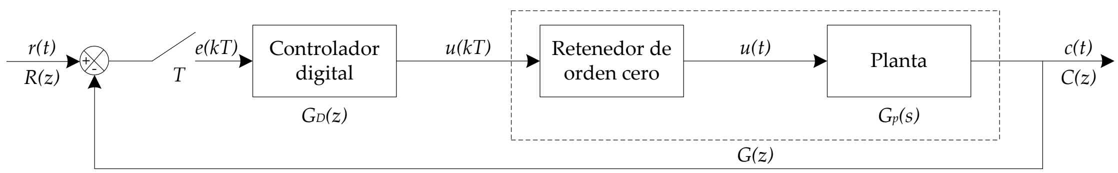


Figura 1: Sistema de control digital considerado.

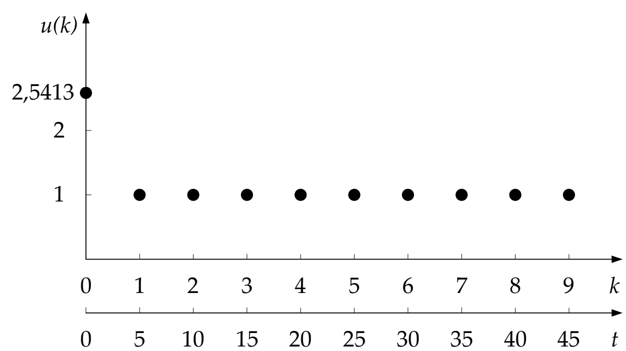


Figura 2: Señal $u(k)$ obtenida con el sistema de control regulado.

Se asume que la función de transferencia de la planta obedece a

$$G(z) = \frac{0,3935z^{-2}}{1 - 0,6065z^{-1}}.$$

Además, con el controlador $G_D(z)$ diseñado la señal en tiempo discreto $u(k)$ que se adquiere aparece representada en la figura 2.

2. (30 puntos) Sea un sistema de control digital, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto obedece a

$$G(z) = \frac{K\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(z-0,5)(z-1)}.$$

Determine, para un período de muestreo $T = 0,5$ s, la frecuencia a la que el sistema presenta una oscilación sostenida en el tiempo, sin recurrir para ello a las condiciones del módulo y del ángulo.

3. (30 puntos) Sea la siguiente ecuación diferencial que relaciona una salida $c(t)$ con una entrada $r(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}c(t) + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) + a_2 c(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t).$$

Determine los valores de a_1 y a_2 si se procede a «discretizar» la función de transferencia del sistema mediante el método de diferencias de atraso (*backward difference method*), y el diagrama de polos y ceros del sistema se corresponde con el reflejado en la figura 3, para una frecuencia de muestreo w_s de 2π rad/s.

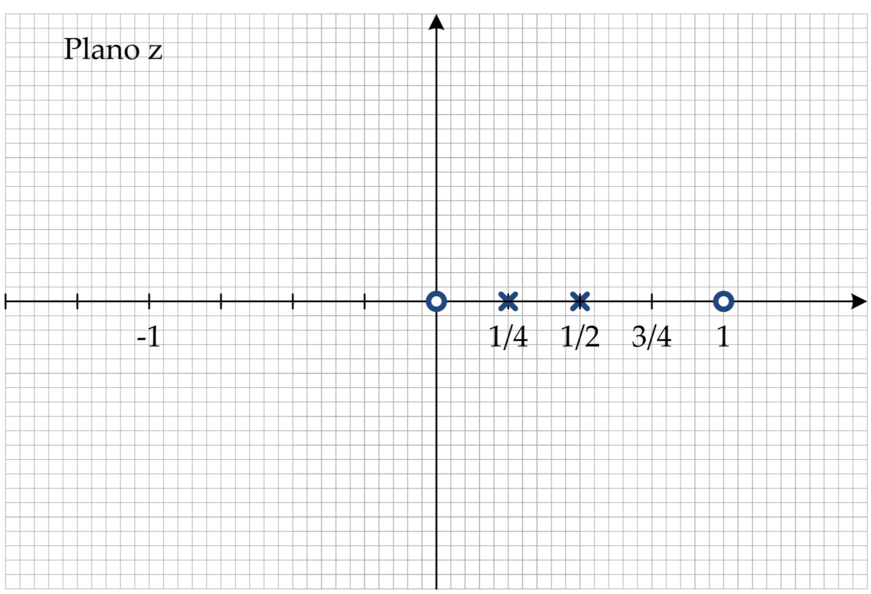


Figura 3: Diagrama de polos y ceros del sistema considerado.

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} = F(z)$$

$$F(z) = a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_N z^{-N}$$

DADO QUE $G(z)$ TIENE POR PRIMER TÉRMINO EL FACTOR $0{,}3935\, z^{-2}$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1}) N(z)$$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)\, R(z)}{R(z)\, G(z)} = F(z) \cdot \frac{R(z)}{G(z)}$$

$$= F(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1-0{,}6065 z^{-1}}{0{,}3935 z^{-2}}$$

CONFORME A LA GRÁFICA

$$= F(z) \cdot \frac{2{,}5413(1-0{,}6065 z^{-1})}{(1-z^{-1}) z^{-2}}$$

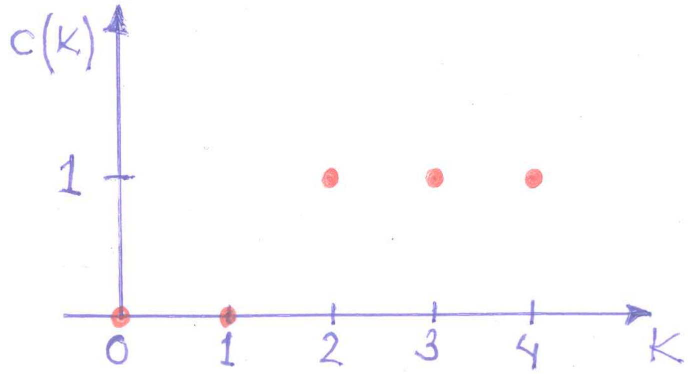
$$U(z) = 2{,}5413 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{2{,}5413(1-0{,}6065 z^{-1})}{(1-z^{-1})};$$ LUEGO $F(z) = 1 \cdot z^{-2}$

$$\left.\begin{aligned} 1 - F(z) &= (1-z^{-1}) N(z) \\ 1 - z^{-2} &= (1 - z^{-1}) N(z) \end{aligned}\right\} \quad N(z) = 1 + z^{-1}$$

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1-z^{-1})N(z)} = \frac{2{,}5413(1-0{,}6065 z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}$$

$$C(z) = F(z)\, R(z) = z^{-2} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$



$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z^2+\left(K-\frac{3}{2}\right)z+\frac{1}{2}+\frac{K\sqrt{2}}{2}}$$

CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE JURY

$$P(z) = z^2+\left(K-\frac{3}{2}\right)z+\frac{1}{2}+K\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

1.- $|a_2| < a_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}+\frac{K\sqrt{2}}{2}\right| < 1 \Rightarrow -2{,}12 < K < 0{,}71$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2.- $P(1) > 0 \Rightarrow K\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \Rightarrow K > 0$

3.- $P(-1) > 0 \Rightarrow 3+K\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \Rightarrow K < 10{,}24$

RANGO DE ESTABILIDAD: $0 < K < 0{,}71$

SI $K = 0{,}71$, SISTEMA CRÍTICAMENTE ESTABLE (OSCILACIÓN SOSTENIDA EN EL TIEMPO)

$$P(z) = z^2 - 0{,}7929z + 1 = 0$$

LAS RAÍCES SON $z_d = 0{,}3965 \pm 0{,}9181j \rightarrow |z_d| = 1$

$$z = e^{sT} = e^{-\xi w_n T + j w_d T} \rightarrow \angle z = 2\pi\frac{w_d}{w_s}$$

CON $T = 0{,}5\ s \rightarrow w_s = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$ rad

$$\angle z = \tan^{-1}\frac{0{,}9181}{0{,}3965} = 1{,}1631 \text{ rad} = \frac{w_d}{2}$$

$$\boxed{w_d = 2{,}3262 \text{ rad/s}}$$

$$s^2 C(s) + a_1 s C(s) + a_2 C(s) = s R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

SI $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{1 - z^{-1}}{T}}{\left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^2 + a_1 \frac{1 - z^{-1}}{T} + a_2}$$

$$= \frac{T - Tz^{-1}}{1 + a_1 T + a_2 T^2 - (2 + a_1 T) z^{-1} + z^{-2}}$$

SI $w_s = 2\pi \, rad/s \longrightarrow T = 1 s$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + a_1 + a_2 - (2 + a_1) z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{z^2 - z}{(1 + a_1 + a_2) z^2 - (2 + a_1) z + 1}$$

$$= \frac{z(z-1)}{z^2 - \frac{2 + a_1}{1 + a_1 + a_2} z + \frac{1}{1 + a_1 + a_2}}$$

POLOS EN $z = +\frac{1}{2}$ Y $z = +\frac{1}{4}$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right) = z^2 - \frac{3}{4} z + \frac{1}{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2 + a_1}{1 + a_1 + a_2} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{1 + a_1 + a_2} = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_2 = 3 \end{array}}$$