Apellidos: ________________________ **Nombre:** ________________

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (45 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 1.

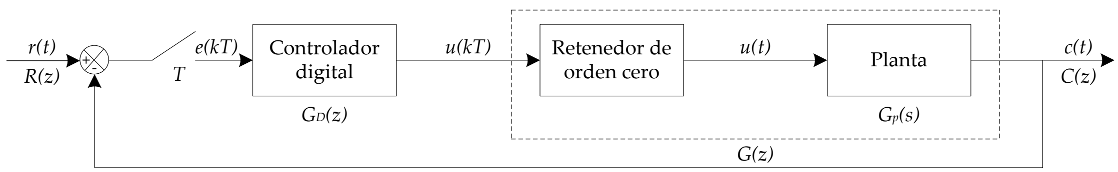


Figura 1: Sistema de control digital considerado.

   (a) (30 puntos) Diseñe un controlador $G_D(z)$, de forma que la respuesta en lazo cerrado presente un tiempo de establecimiento mínimo, con un error en régimen permanente nulo y sin oscilaciones en régimen permanente ante una entrada escalón unidad. Se asume un período de muestreo T de 1 s y la función de transferencia de la planta obedece a

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

   (b) (15 puntos) Determine el error en régimen permanente e_{ss} del sistema de control ante una entrada rampa unidad.

2. (25 puntos) Sea la siguiente ecuación diferencial que relaciona una salida $c(t)$ con una entrada $r(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}c(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) + c(t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) + 5r(t).$$

Si se procede a «discretizar» la respuesta al impulso del sistema mediante el método de igualación polo-cero o MPZ (*matched pole-zero mapping method*), determine para qué valores de T el sistema oscila.

3. (30 puntos) Sea el sistema de control digital mostrado en la figura 2. Se asume un período de muestreo T de 1 s, y la función de transferencia de la planta obedece a

$$G_p(s) = \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}.$$

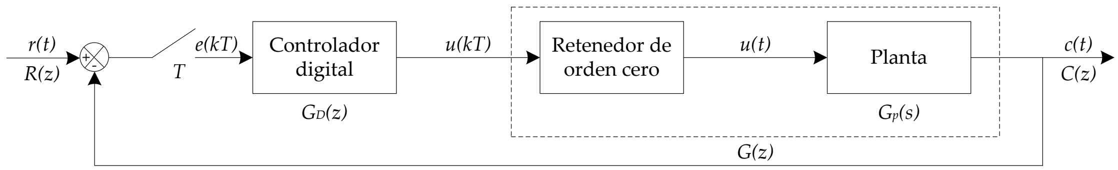


Figura 2: Sistema de control digital considerado.

Diseñe un controlador digital PI, de forma que las raíces dominantes en lazo cerrado presenten una relación de amortiguamiento $\zeta = 0,5$ y el número de muestras por ciclo de oscilación natural amortiguada ($w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$) ascienda a 10. Determine, igualmente, el error en régimen permanente ante una entrada rampa unitaria.

a) $G(z) = \mathcal{Z}\left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\}$

$$= \frac{0{,}3679(1+0{,}7181z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0{,}3679z^{-1})} = \frac{0{,}3679z+0{,}2642}{(z-1)(z-0{,}3679)} = 0{,}3679z^{-1}+\dots$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\,G(z)}{1+G_D(z)G(z)} = F(z) = \cancel{a_0} + a_1z^{-1} + a_2z^{-2};\ N \geq 2$$

$F(z) = a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$

PARA ENTRADA ESCALÓN UNIDAD, $1-F(z) = (1-z^{-1})\,N(z)$

PARA EVITAR OSCILACIONES, ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN UNIDAD, $c(t \geq 2T) =$ CONSTANTE.

$U(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b\,(z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = b_0 + b_1z^{-1}$

CON UN INTEGRADOR EN LA PLANTA, $b=0$, PARA GARANTIZAR SALIDA CONSTANTE

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)\,R(z)}{R(z)\,G(z)} = F(z)\cdot\frac{R(z)}{G(z)} = F(z)\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{G(z)}$$

$$= \frac{1-0{,}3679z^{-1}}{0{,}3679(1+0{,}7181z^{-1})z^{-1}}\cdot F(z)$$

$F(z) = (1+0{,}7181z^{-1})z^{-1}\cdot F_1$

$U(z) = 2{,}7181\,(1-0{,}3679z^{-1})\,F_1$

$1-F(z) = (1-z^{-1})N(z) = 1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2} = (1-z^{-1})\cdot N(z)$

DIVIDIENDO $1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}$ POR $(1-z^{-1})$, OBTENEMOS UN COCIENTE $N(z) = 1+(1-a_1)z^{-1}$ Y UN RESTO TAL QUE $1-a_1-a_2=0$ (1)

$F(z) = a_1z^{-1}+a_2z^{-2} = (1+0{,}7181z^{-1})z^{-1}\cdot F_1$

DIVIDIENDO $a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$ POR $(1+0{,}7181z^{-1})z^{-1}$, OBTENEMOS UN COCIENTE $F_1 = a_1$ Y UN RESTO TAL QUE $a_2-0{,}7181a_1=0$ (2)

$$F_1 = a_1 = 0{,}5820$$

$$\left.\begin{aligned} 1 - a_1 - a_2 &= 0 \\ a_2 - 0{,}7181\, a_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_1 &= 0{,}5820 \\ a_2 &= 0{,}4180 \end{aligned}$$

$$N(z) = 1 + (1 - a_1) z^{-1} = 1 + 0{,}418 z^{-1}$$

$$F(z) = 0{,}5820 z^{-1} + 0{,}4180 z^{-2}$$

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1 - z^{-1}) N(z)} = \frac{1{,}5820 - 0{,}5820 z^{-1}}{1 + 0{,}4180 z^{-1}}$$

b)

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1{,}4180$$

$$K_v = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} \cdot G_D(z) \cdot G(z) \right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1} \cdot \frac{F(z)}{(1 - z^{-1}) \cdot N(z)} \right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{0{,}5820 z^{-1} + 0{,}4180 z^{-2}}{1 + 0{,}4180 z^{-1}} = 0{,}7052$$

$$s^2 C(s) + 2s C(s) + C(s) = 5s R(s) + 5R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s+5}{s^2+2s+1} = \frac{5}{s+1} = H(s)$$

$$H(z)\Big|_{z=e^{sT}} = K^* \cdot \frac{z+1}{z-e^{-T}}$$

COMO $T \in \mathbb{R}^+$, EL SISTEMA SIEMPRE ES ESTABLE, LUEGO PARA $T>0$ EL SISTEMA NUNCA OSCILA.

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\cdot z^{-2}\cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0{,}6321\, z^{-3}}{(1-0{,}3679\, z^{-1})}$$

$$= \frac{0{,}6321}{z^2(z-0{,}3679)}, \text{ CON } T = 1\,s$$

RAÍCES EN LAZO CERRADO

$$\zeta = 0{,}5$$

$$\frac{w_s}{w_d} = 10;\ w_s = 10\, w_d;\ w_d = \frac{w_s}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\ rad/s$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow w_n = 0{,}7255\ rad/s$$

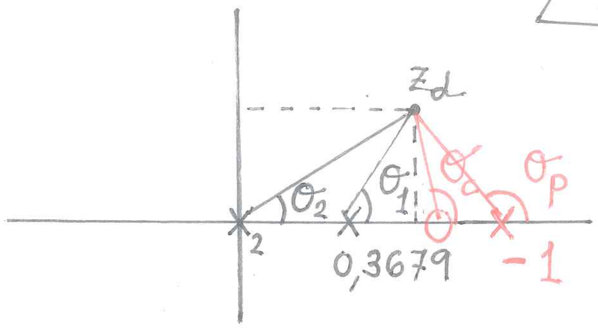
$$s_d = -\zeta w_n \pm w_d j = -0{,}3627 \pm 0{,}6283j$$

$$z_d = e^{sT} = e^{-0{,}3627+0{,}6283j} = e^{-0{,}3627}\cdot e^{+0{,}6283j}$$

$$\left.\begin{array}{l} |z_d| = e^{-0{,}3627} = 0{,}6958 \\ \angle z_d = 0{,}6283\ rad\ (36^\circ) \end{array}\right\}\ z_d = 0{,}563 + 0{,}409j$$

$$\angle G(z) = -\theta_1 - 2\theta_2 = -64{,}5^\circ - 2\cdot 36^\circ$$

$$= -136{,}5^\circ \neq -180^\circ$$



UN REGULADOR PI ADOPTA LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$G_{PI}(z) = K_{PI}\cdot\frac{z-c}{z-1}$$

$\theta_p = 136{,}9°$

$\underline{\angle G_{PI}(z)\,G(z)} = \theta_c - \theta_1 - 2\theta_2 - \theta_p = -180°; \quad \theta_c = 93{,}4°$

$\tan 86{,}6° = \dfrac{0{,}409}{c - 0{,}563}; \quad c = 0{,}5873$

$$G_{PI}(z) = K_{PI} \cdot \frac{z - 0{,}5873}{z - 1}$$

$$\left| K_{PI} \cdot \frac{z - 0{,}5873}{z - 1} \cdot \frac{0{,}6321}{z^2(z - 0{,}3679)} \right|_{z = z_d} = 1 \longrightarrow K_{PI} = 0{,}8023$$

$$G_{PI}(z) = 0{,}8023 \cdot \frac{z - 0{,}5873}{z - 1}$$

ERROR DE VELOCIDAD $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$

$$K_v = \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})\,G(z)\,H(z)}{T} = \lim_{z \to 1} \frac{\cancel{z-1}}{z} \cdot \frac{z - 0{,}5873}{\cancel{z-1}} \cdot \frac{0{,}5071}{z^2(z - 0{,}3679)}$$

$= 0{,}3311$

$e_{ss} = 3{,}0203$