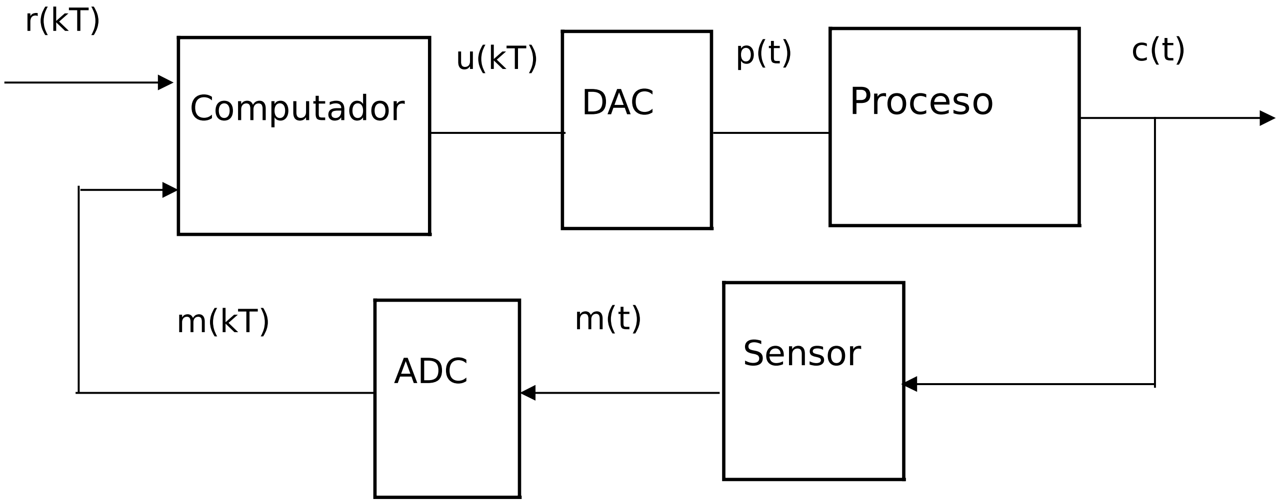
Tema 2

Sistemas de control en tiempo discreto

I. Conceptos generales

1. El computador como elemento de control



1. El computador como elemento de control

- **Ventajas:**
  - Se pueden realizar acciones de control más complejas.
  - El cambio de regulador es más sencillo. (Flexibilidad)
  - El ordenador puede realizar varios procesos a la vez. (control multivariable)
  - Las operaciones son más precisas que con sistemas analógicos.
  - Mayor inmunidad al ruido y distorsión. Las señales digitales se regeneran, no se amplifican.

1. El computador como elemento de control

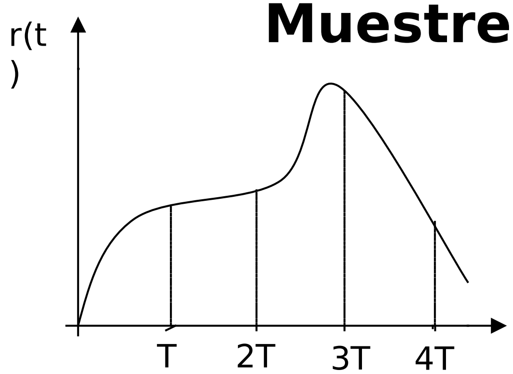
- **Inconvenientes:**
  - Puede resultar costoso para sistemas sencillos.
  - Requiere personal cualificado para el mantenimiento.
  - PÉRDIDA DE INFORMACIÓN:
    - No existe control entre dos muestras consecutivas.
    - Proceso de conversión: muestreo, retención y cuantificación.

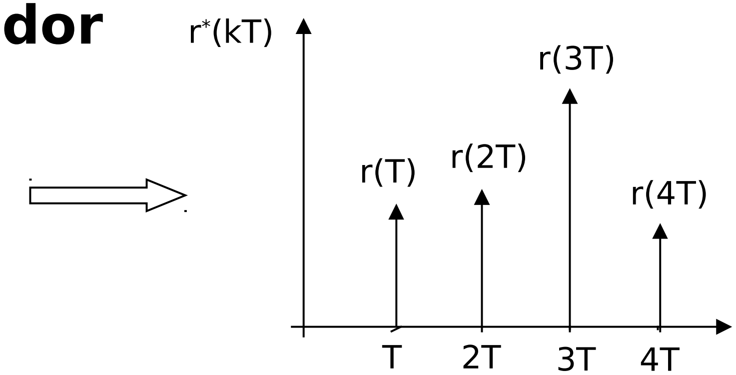
2. Sistemas discretos y transformada z

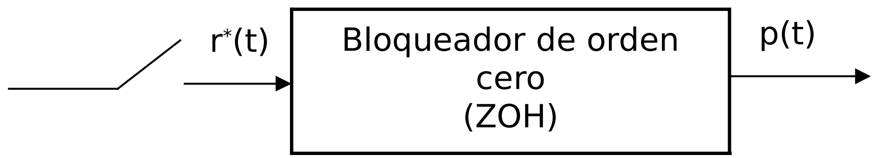
- SISTEMA DE CONTROL DISCRETO O MUESTREADO: Sistema de control mediante computador, considerando únicamente determinados instantes de la señal contínua denominados **muestras**.
- PROCESO DE DATOS: Se almacenan los datos para posteriormente ser analizados. No sucede en tiempo real.
- CONTROL DIGITAL: Control de un sistema mediante computador en tiempo real, usando convertidores (A/D y D/A), instantes de muestreo y algoritmos de control adecuados.

2. Sistemas discretos y transformada z

Muestreador





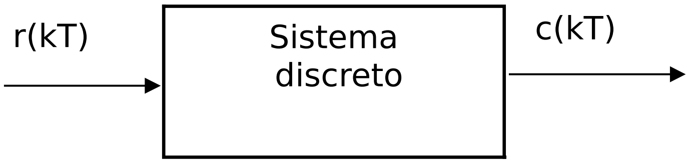


$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t-kT)$$

- El ZOH mantiene la muestra constante hasta el siguie período.
- El periodo de muestreo y el nivel de cuantificación in en el error que se produce y en la estabilidad del sister

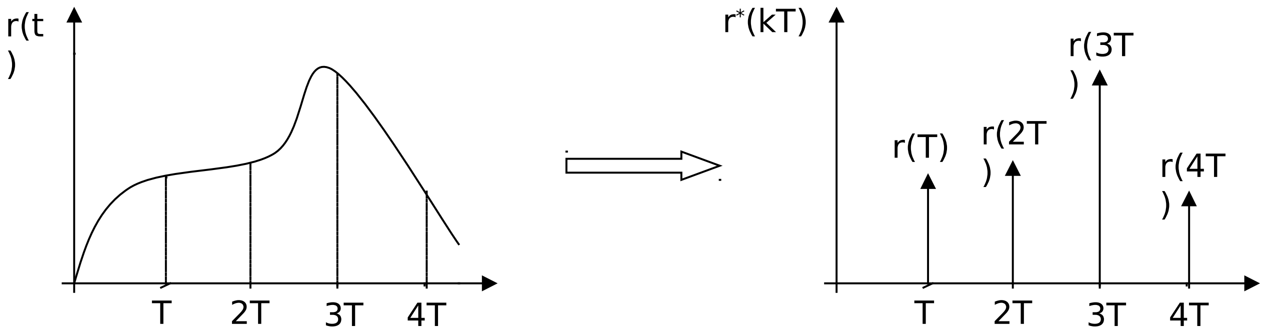
2. Sistemas discretos y transformada z

Sistema discreto:



La entrada y la salida es una secuencia de números separados un intervalo T seg. que únicamente
tienen un valor determinado para k=0,1,2,3,....

2. Sistemas discretos y transformada z



$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t-kT)$$

Aplicamos transformada de Laplace → $L\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-kTs}$

Se define $z = e^{sT}$

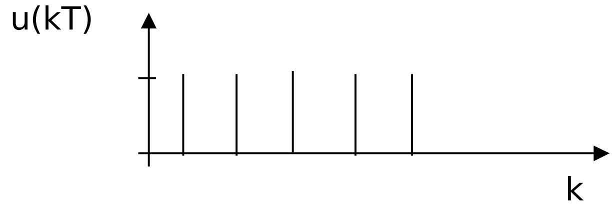
y aplicamos transformada z → $Z\{r^*(t)\} = R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}$

Serie geométrica de razón z^{-1} → $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1-z^{-1}}$

2. Sistemas discretos y transformada z

Ejemplo: Calcular la transformada z del escalón unitario *r(t)=u(t)*

$$u(t)=\begin{cases}1 \ldots k \geq 0\\ 0 \ldots k \langle 0\end{cases}$$



$$R(z)=\sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Propiedad de suma y resta

Si la señal $y_1(kT)$ tiene la transformada $Y_1(z)$ y la señal $y_2(kT)$ tiene la transformada $Y_2(z)$, la combinación lineal de ambas tiene la siguiente transformada:

$$\mathfrak{Z}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$$

Propiedad multiplicación por una constante

$$\mathfrak{Z}[\alpha y(kT)] = \alpha \mathfrak{Z}[y(kT)] = \alpha Y(z)$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Propiedad del desplazamiento (retraso)

$$Z\left[y(k)\right] = Y(z)$$

$$Z\left[y(k-n)\right] = z^{-n}Y(z)$$

Un sistema discreto se puede representar mediante una ecuación en diferencias:

$$c(k) + a_1 c(k-1) + a_2 c(k-2) + \ldots + a_n c(k-n) = b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \ldots + b_m r(k-m)$$

$$C(z) + a_1 z^{-1} C(z) + a_2 z^{-2} C(z) + \ldots + a_n z^{-n} C(z) = b_0 R(z) + b_1 z^{-1} R(z) + \ldots + b_m z^{-m} R(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}}$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Propiedad del desplazamiento (adelanto)

$$\mathcal{Z}[y(kT + nT)] = z^n \left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT) z^{-k} \right]$$

Propiedad de traslación compleja

$$\mathcal{Z}[e^{\mp \alpha kT} y(kT)] = Y(z e^{\pm \alpha T})$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Teorema del valor final

- En sistemas continuos:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

- En sistemas discretos:

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

Se aplica cuando deseamos ver la tendencia del error en régimen permanente.

2. Sistemas discretos y transformada z

Teorema del valor final

- **Ejemplo:** Determinar el valor de la salida en régimen permanente del siguiente sistema, cuando se le aplica a la entrada un escalón unitario:

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0.58(1+z)}{z+0.16} \qquad r(t)=u(t)$$

$$r(k)=1,,(k\geq 0)\rightarrow R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$C(z)=\frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)}$$

$$c(\infty)=\lim_{z\rightarrow 1}(1-z^{-1})\frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)}=1$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Teorema del valor inicial

- En sistemas discretos:

$$\lim_{k \to 0} x(k) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Se aplica cuando deseamos calcular el valor inicial de la serie discreta.

Convolución real

$$Y_1(z)Y_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{N} y_1(kT)y_2(NT - kT)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{N} y_2(kT)y_1(NT - kT)\right]$$

$$= \mathcal{Z}[y_1(kT) * y_2(kT)]$$

Resumen de teoremas de la transformada Z

Suma y resta	$\mathcal{Z}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$	
Multiplicación por una constante	$\mathcal{Z}[\alpha y(kT)] = \alpha\mathcal{Z}[y(kT)] = \alpha Y(z)$	
Traslación real	$\mathcal{Z}[y(k-n)T] = z^{-n}Y(z)$	(retraso)
	$\mathcal{Z}[y(k+n)T] = z^{n}\left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k}\right]$	(adelanto)
	en donde n = entero positivo	
Traslación compleja	$\mathcal{Z}[e^{\mp\alpha kT}y(kT)] = Y(ze^{\pm\alpha T})$	
Teorema del valor inicial	$\lim_{k\to 0} y(kT) = \lim_{z\to\infty} Y(z)$	
Teorema del valor final	$\lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})Y(z)$	
	si $(1 - z^{-1})Y(z)$ no tiene polos sobre o fuera $\lvert z\rvert = 1$.	
Convolución real	$Y_1(z)Y_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} y_1(kT)y_2(NT - kT)\right]$	
	$= \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} y_2(kT)y_1(NT - kT)\right]$	
	$= \mathcal{Z}[y_1(kT) * y_2(kT)]$	

3. Transformada z inversa

Métodos de cálculo

- Se descompone la función en fracciones simples y se recurre a las tablas.

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i z}{z - a_i} \quad \Longrightarrow \quad x(k) = \sum_{i=1}^{n} b_i a^k$$

- Se divide el numerador entre el denominador. Al polinomio en “z” resultante se le aplica la definición de transformada z.

$$z^{-n} = \delta(k-n),, \begin{cases} 1,, (k=n) \\ 0,, (k \neq n) \end{cases}$$

- Fórmula de inversión.

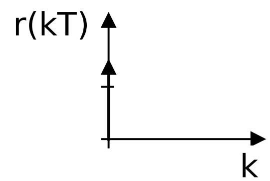
3. Transformada z inversa

- **Ejemplo**: Obtener la transformada z inversa de la siguiente ecuación en diferencias, correspondiente a un sistema de primer orden:

$$c(k) = ac(k-1) + r(k)$$

Si le aplicamos un impulso definido por:

$$r(t) = \begin{cases} 1...(n = 0) \\ 0...(n \rangle 0) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad R(z) = 1$$



$$c(k) = ac(k-1) + r(k)$$

$$c(k)(1 - az^{-1}) = r(k)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

3. Transformada z inversa

Dos formas de hacerlo:

1. Según tablas: $C(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad c(k)=a^{K}$

2. Otra forma es dividir el numerador entre el denominador:

$$C(z)=1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+a^{3}z^{-3}+\ldots$$

$$z^{-n}=\delta(k-n),,\begin{cases}1,,(k=n)\\0,,(k\neq n)\end{cases}$$

$$c(0)=1$$

$$c(1)=a$$

$$c(2)=a^{2}.......c(k)=a^{k}$$

3. Transformada z inversa

Fórmula de inversión

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} Y(z) z^{k-1}\, dz$$

donde la trayectoria Γ es un círculo de radio:

$$|z| = e^{cT}$$

El valor de *c* es tal que contiene todos los polos $Y(z)z^{k-1}$

La resolución de esta integral se realiza empleando el teorema de los residuos de la teoría de variable compleja.

$$y(kT) = \sum residuos Y(z).z^{k-1}$$

4. Relación entre los planos "s" y "z"

- En sistemas continuos, la ubicación de los polos en el plano "s", determina la estabilidad del sistema.
- Consideremos la siguiente función contínua:

$$g(t) = e^{-at},,(t > 0) \quad \Longrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s+a}$$

(Un polo en s=-a)

Su transformada "z" es:

$$G(z) = Z\left[e^{-akT}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{aT})^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

Serie geométrica de razón $(ze^{aT})^{-1}$

4. Relación entre los planos “s” y “z”

- G(z) Tiene un polo en $z = e^{-aT}$

- El polo en “s”: **s=-a** se corresponde con el polo en el plano “z” $z = e^{-aT}$

$$\Longrightarrow \qquad z = e^{sT}$$

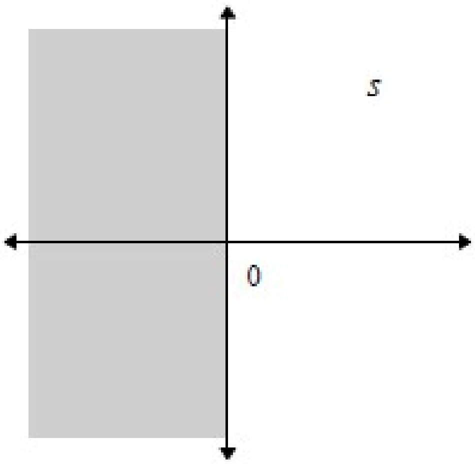
- La localización de los polos en el plano “z”, dependen del periodo de muestreo T.
- Relación entre polos del plano “s” y del plano “z”:

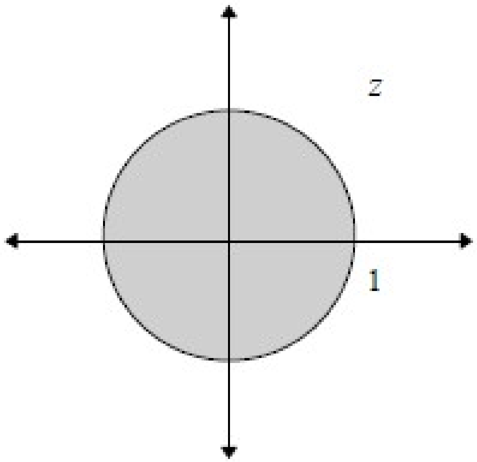
$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sigma \pm \omega_d j$$

$$z = e^{sT} = \exp(\sigma T \pm \omega_d T j) \Rightarrow \begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega_d T + 2k\pi \end{cases}$$

4. Relación entre los planos “s” y “z”

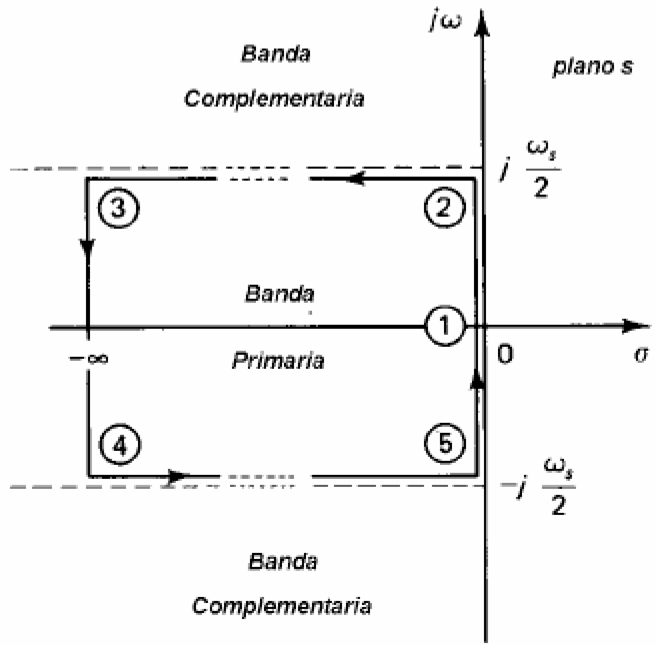
- Polos y ceros en s, cuyas frecuencias (ω_d) difieren en $2\pi/T$ son mapeados en las mismas localizaciones en z, es decir, la correspondencia no es única.
- EL semiplano izquierdo de se transforma en el interior del circulo unidad en z, siendo la circunferencia unidad la imagen del eje s = jω

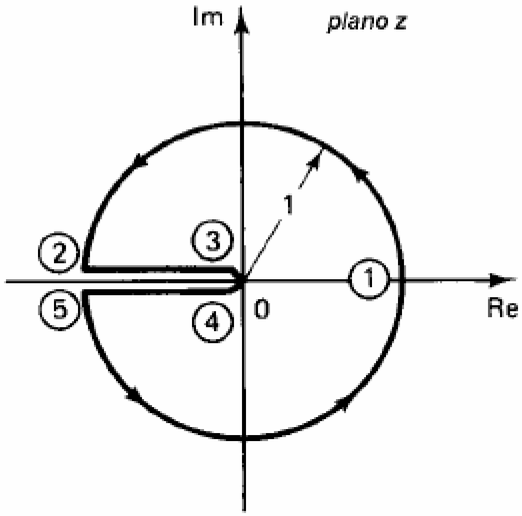




4. Relación entre los planos "s" y "z"

- Cada banda de anchura ω_s ($2\pi/T$) se mapea en el círculo unidad. A la primera banda se le llama banda primaria, y al resto bandas complementarias. Esto prueba la no unicidad del mapeo s->z

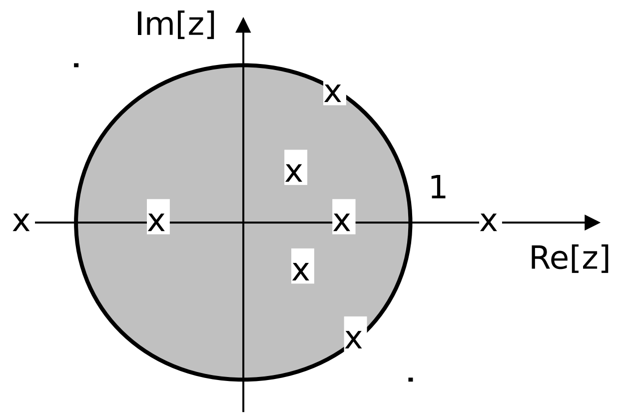




5. Estabilidad

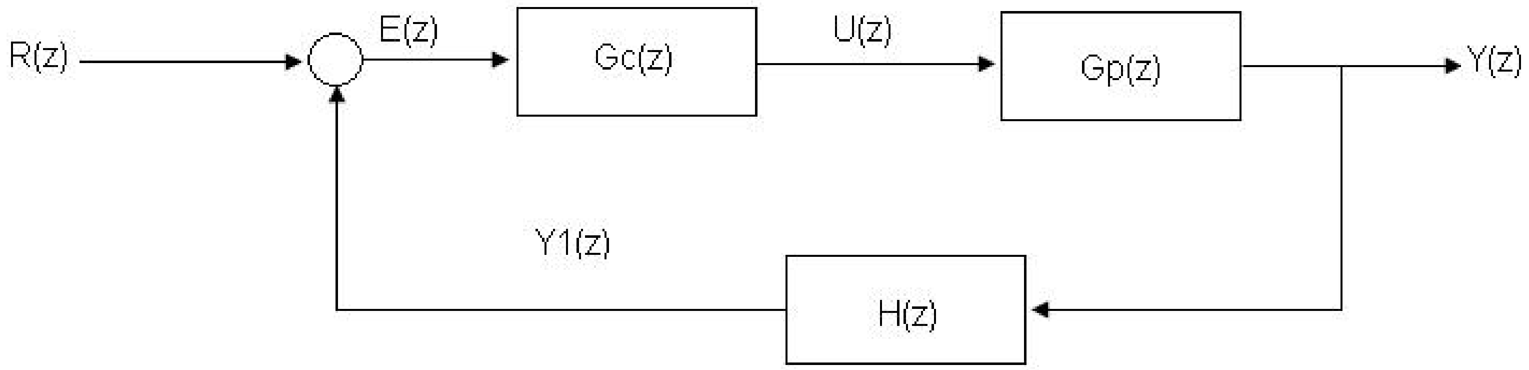
- En sistemas continuos, un sistema será estable cuando sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo: (σ<0)

$$\sigma < 0 \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} < 1$$



Para que el sistema discreto sea estable, todos sus polos deberán encontrarse dentro del círculo de radio unidad.

5. Estabilidad – Criterio de Jury



- Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)H(z)}$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

- Criterio de estabilidad de Jury para el polinomio A(z) que representa la ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado.
- El criterio define el numero de raíces de A(z) que se ubica dentro del circulo unitario del plano Z.
- Condiciones:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a^{n-1} z + a_n$$

$$a_0 > 0$$

$$A(z)\big|_{z=1} > 0$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

- El arreglo de coeficientes es el siguiente:
- donde:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
R_1 & a0 & a1 & a2 & a3 & \cdots & \cdots & an \\
R_2 & b0 & b1 & b2 & \cdots & \cdots & bn-1 & 0 \\
R_3 & c0 & c1 & c2 & \cdots & cn-2 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$b_i = a_i - a_{n-i}\alpha_1$$

$$b_0 = a_0 - a_n\alpha_1$$

$$b_1 = a_1 - a_{n-1}\alpha_1$$

$$b_n = a_n - a_0\alpha_1$$

$$c_j = b_j - b_{(n-1)-j}\alpha_2$$

$$c_{n-1} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{a_n}{a_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{b_{n-1}}{b_0}$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

- **Ejemplo 1:** Determine si A(z) tiene raíces fuera del círculo unitario (igual al número de coeficientes calculados en la primera columna que tienen signo negativo).

- Se concluye que el polinomio A(z) no tiene raíces fuera de la circunferencia unitaria y, por tanto, no tiene raíces inestables.

$$A(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.25z + 0.2$$

$$\begin{array}{c|cccc} R_1 & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.2 \\ R_2 & 0.96 & 0.45 & 0.15 & \\ R_3 & 0.9375 & 0.3065 & & \\ R_4 & 0.7911 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 0.2 \\ \alpha = 0.15 \\ \alpha = 0.38 \\ \\ \end{array}$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

- **Ejemplo 2:** Determine las condiciones que deben satisfacer los coeficientes a_1 y a_2 para que el sistema de control definido por el polinomio característico A(z) sea estable?

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
R_1 & 1 & a_1 & a_2 & \alpha_1 = a_2 \\
R_2 & (1-a_2^2) & a_1(1-a_2) & & \alpha_2 = \dfrac{a_1}{1+a_2} \\
R_3 & \dfrac{1-a_2}{1+a_2}\left[(1+a_2)^2 - a_1^2\right] & & &
\end{array}$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

- 1ª Condición:
- 2ª Condición:
- Conclusión:

$$(1-a_2^2)>0$$

$$|a_2|<1$$

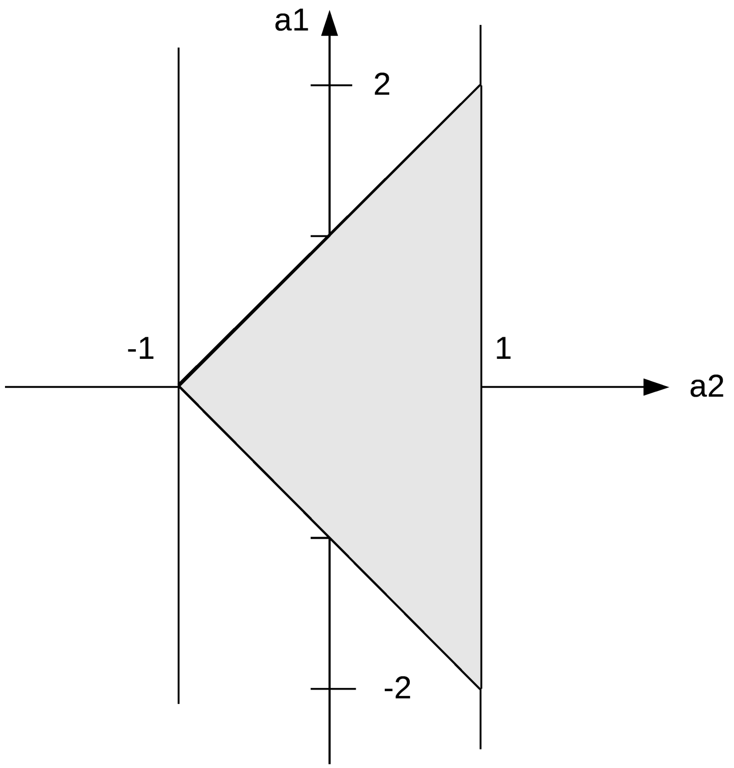
$$\frac{1-a_2}{1+a_2}\left[(1+a_2)^2-a_1^2\right]>0$$

$$(1+a_2)^2>a_1^2$$

$$1+a_2>|a_1|$$

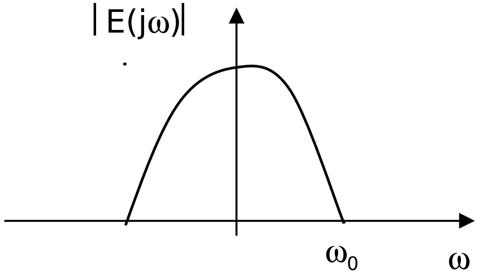
$$1+a_2>a_1 \qquad a_1>0$$

$$1+a_2>-a_1 \qquad a_1<0$$

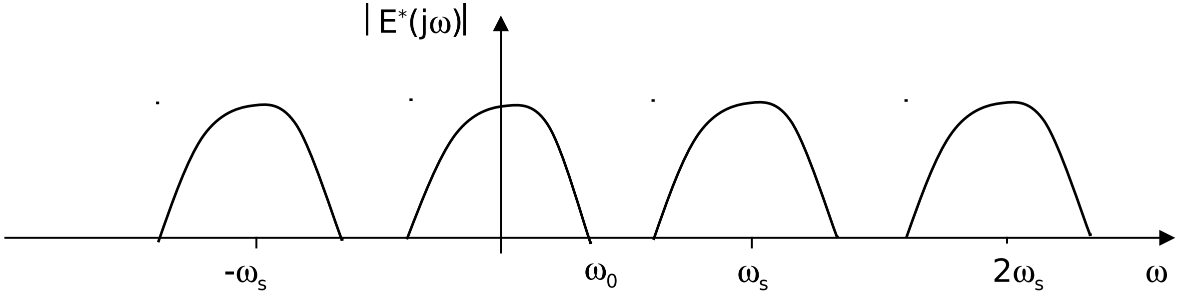


5. Estabilidad - Elección del periodo de muestreo

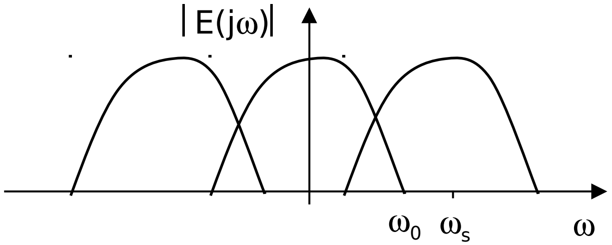
- Teorema de muestreo de Shanon: Para poder reconstruir una señal, es necesario muestrear a una frecuencia de: $f_s \geq 2\omega_0$



- La señal debe estar limitada en banda. Para ello y que no se produzca el fenómeno de "aliasing" o solapamiento, se utiliza un filtro paso bajo.



- En caso de que $\omega_s < \omega_0$:



6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

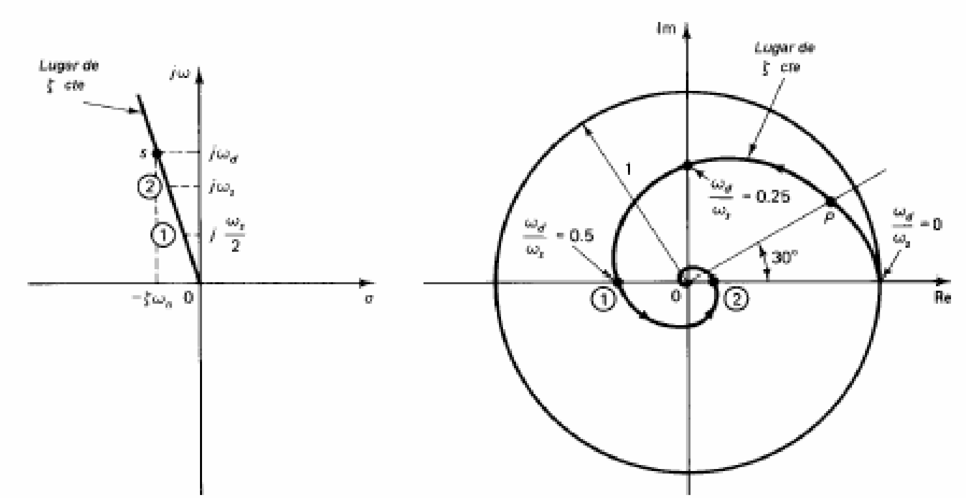
- Las especificaciones de respuesta transitoria vienen dadas por los valores de tiempo de subida, sobreoscilacióny tiempo de establecimiento, relacionados con ξ y ω_n (sistema dominante de 2º orden).

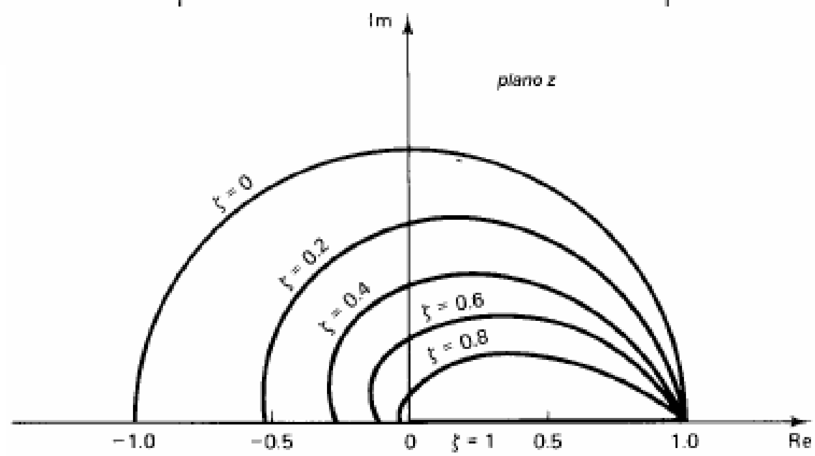
- Los valores de ξ y ω_n determinan la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado en el plano z que satisfagan el transitorio. Es posible obtener diferentes lugares geométricos en el plano z usando:

$$z = e^{Ts}$$

6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

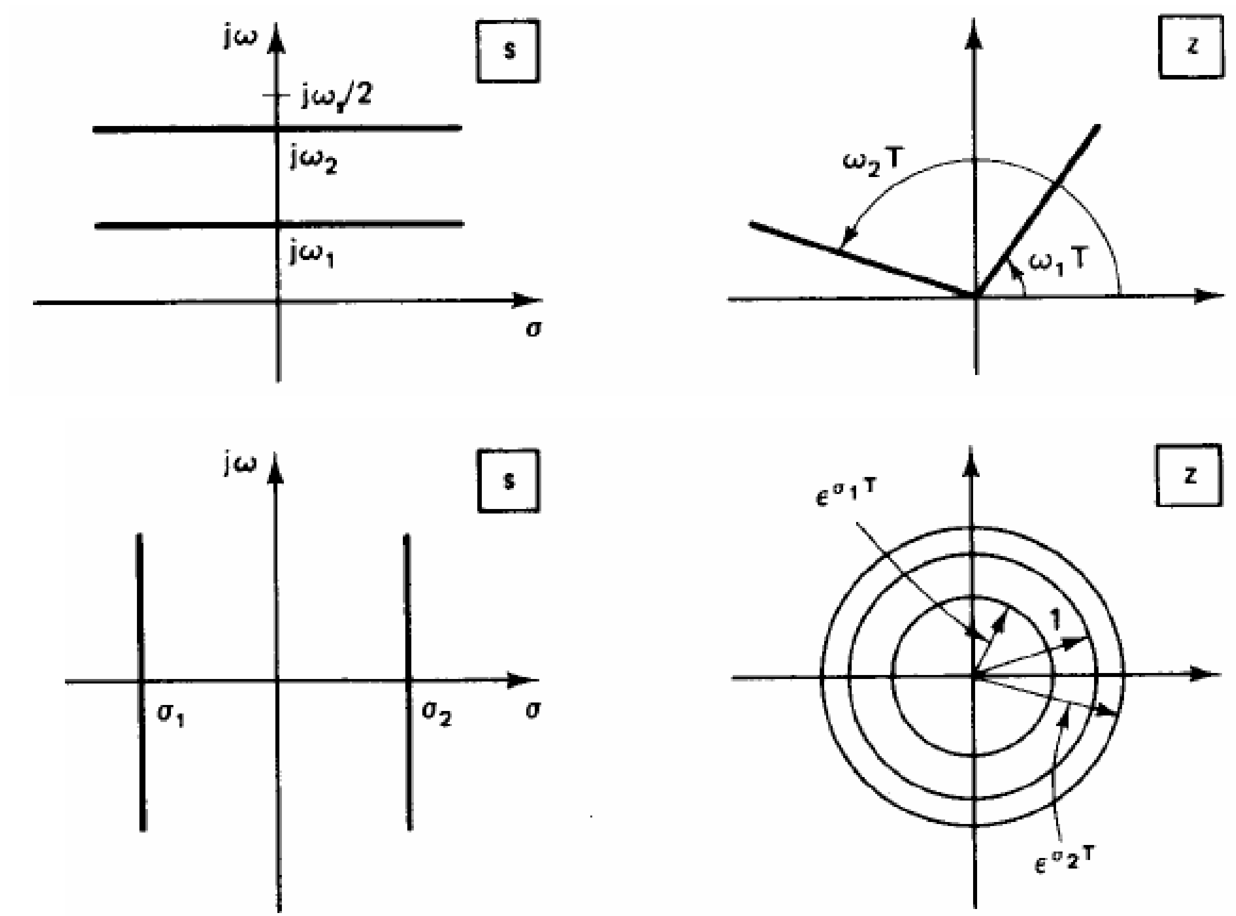
- Relación entre planos s y z.





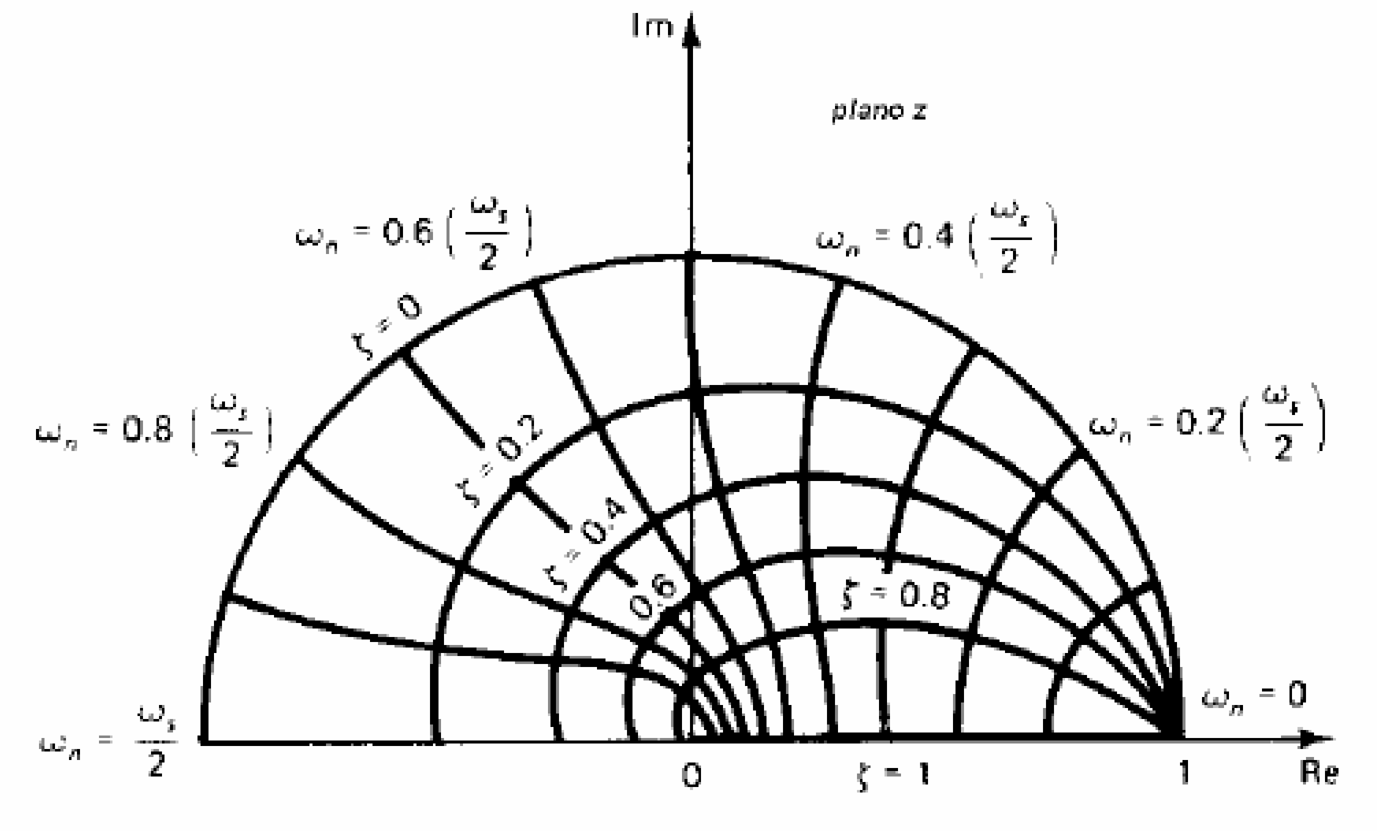
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Relación entre planos s y z.



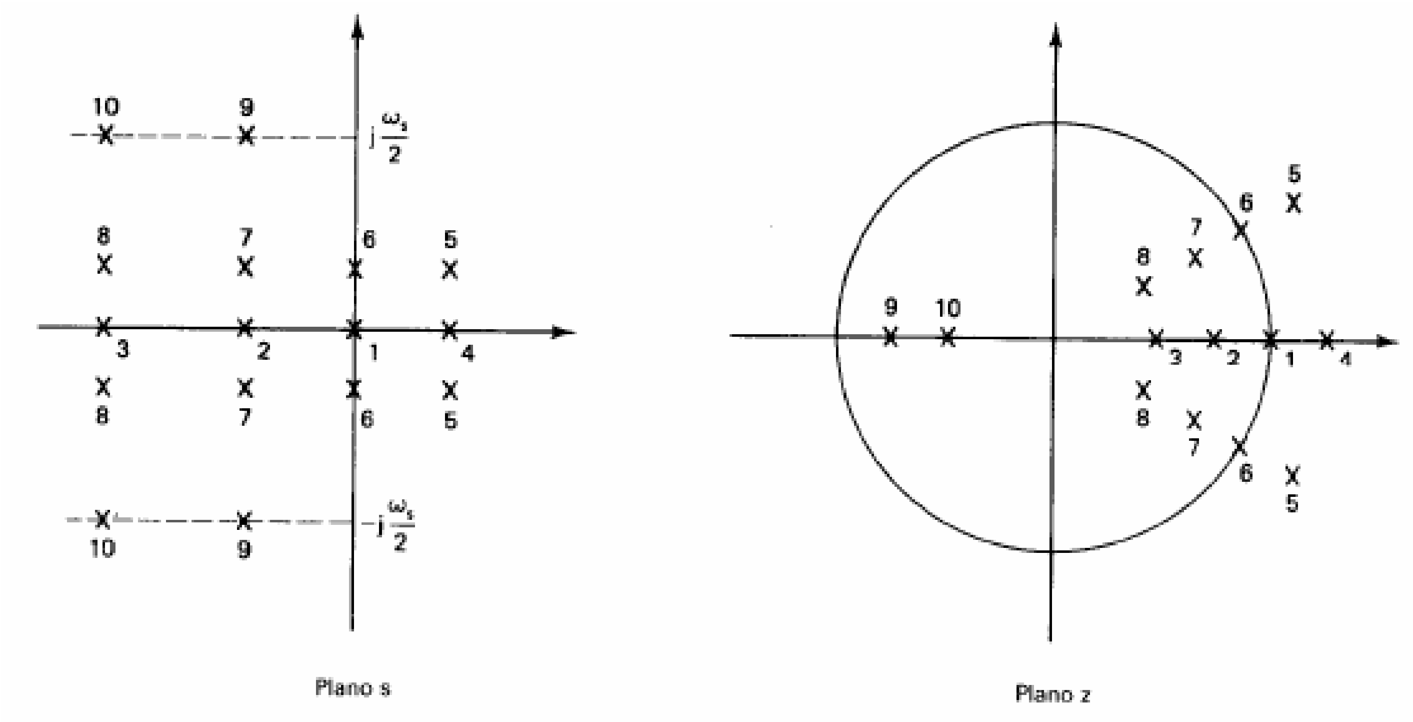
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Abaco con los lugares de ξ y ω_n constante (en función de ω_s)



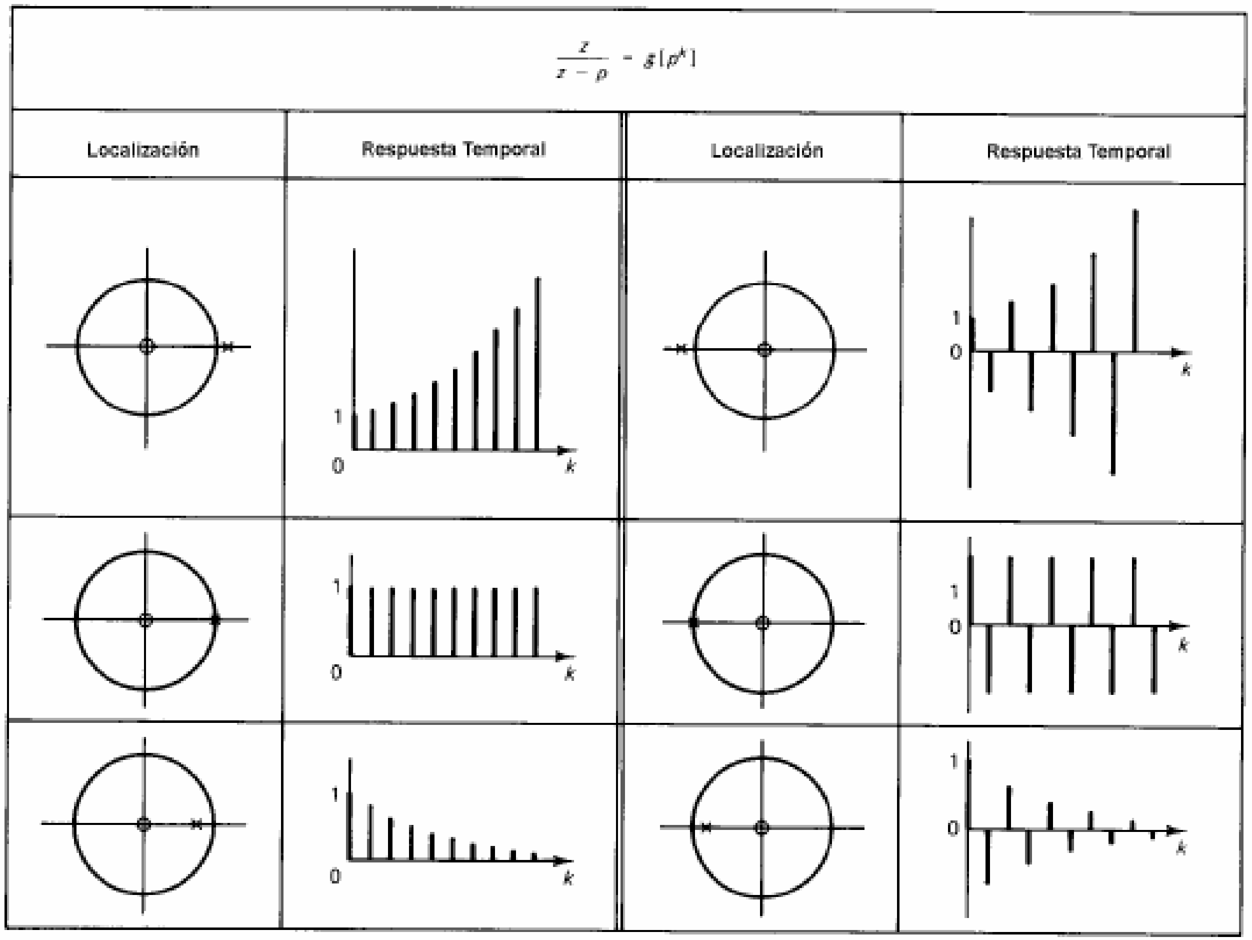
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Correspondencia entre la ubicación de los polos en el plano s y en el plano z, y efecto sobre la respuesta transitoria.



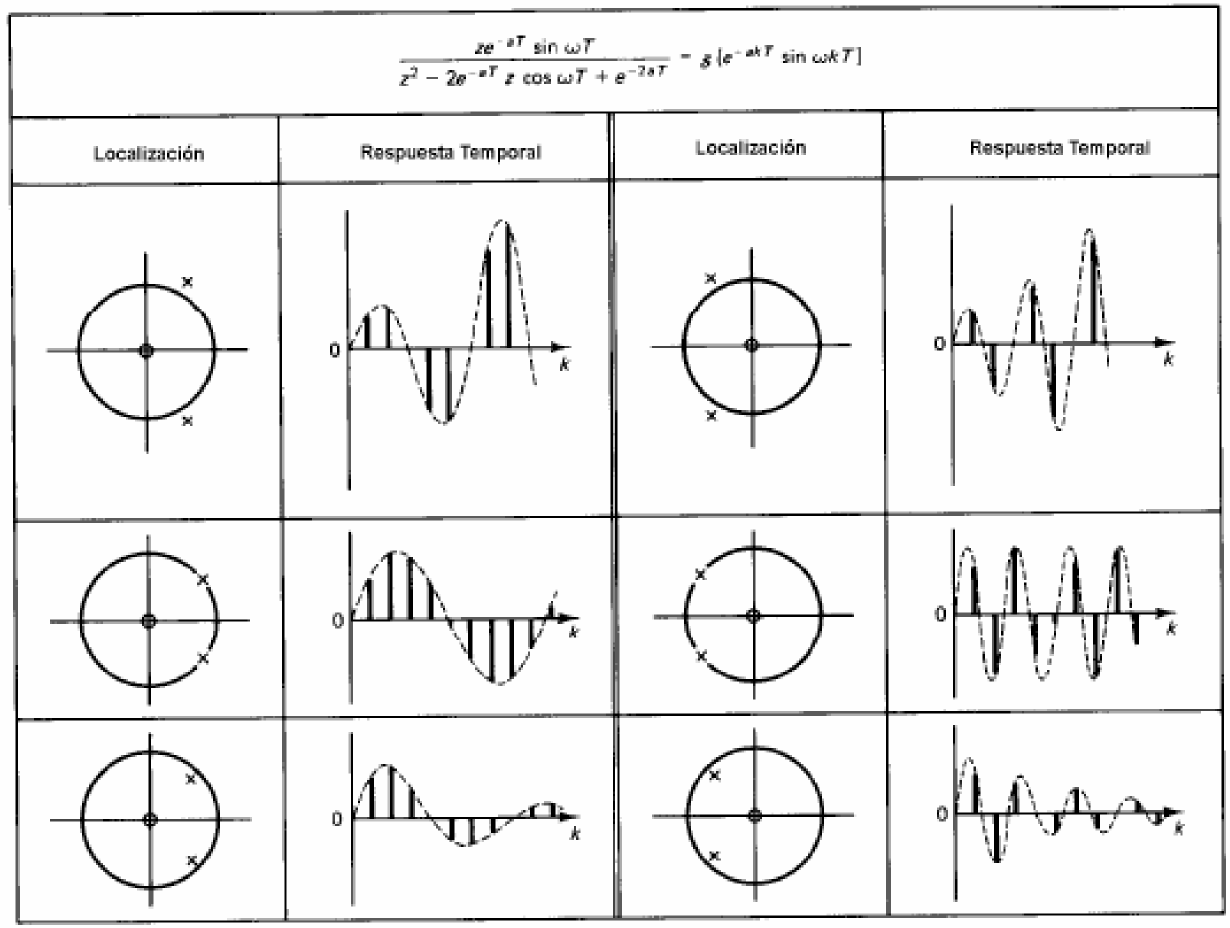
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transit



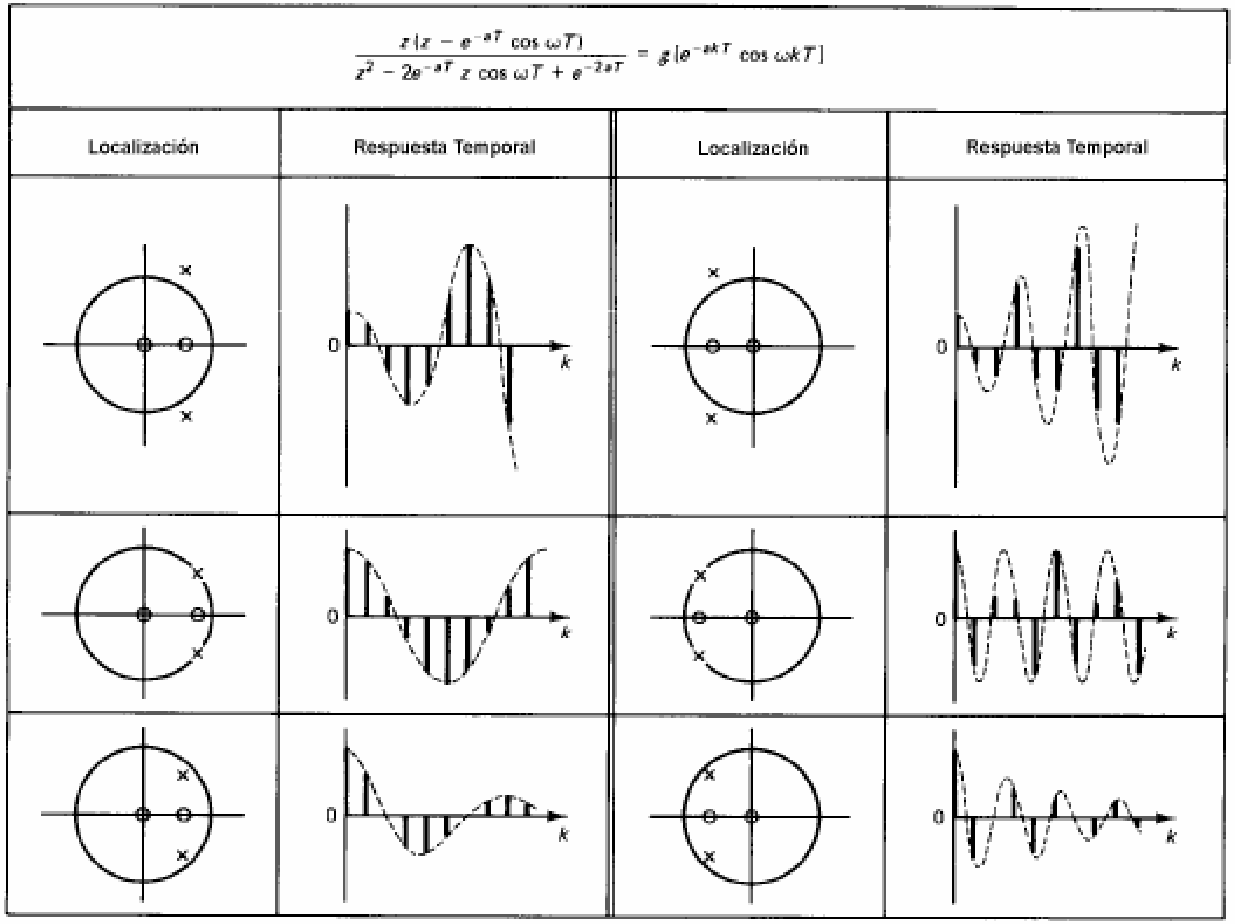
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitor



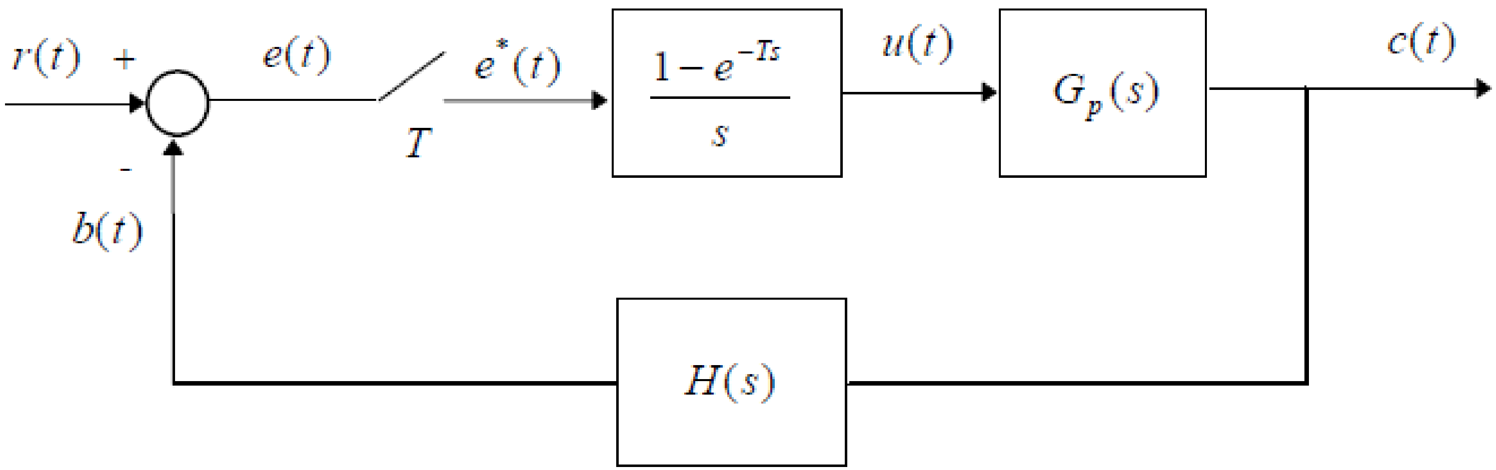
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transit



6. Respuesta temporal – Respuesta permanente

- Considerando un sistema de control digital en lazo cerrado y suponiendo el sistema estable para poder obtener valores en régimen permanente, se va a estudiar el valor del error en régimen permanente e(kT) ante diferentes señales de referencia.



6. Respuesta temporal – Respuesta permanente

- Error en régimen permanente:

$$e_{ss}^{*} = \lim_{t\to\infty} e^{*}(t) = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}((1 - z^{-1}) \cdot E(z))$$

- El sistema viene dado por la función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

- La señal de error E(z) es:

$$E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - GH(z) \cdot E(z)$$

$$e_{ss}^{*} = \lim_{z\to 1}\left[(1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot R(z)\right]$$

6. Respuesta temporal – Respuesta permanente

- Señal de referencia Escalón: Error de posición:

$$e_{ss}^{*}=\lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\cdot\frac{1}{1+GH(z)}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+GH(z)}$$

$$K_p=\lim_{z\to 1}GH(z)\Rightarrow e_{ss}^{*}=\frac{1}{1+K_p}$$

- Señal de referencia Rampa:

$$e_{ss}^{*}=\lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\cdot\frac{1}{1+GH(z)}\cdot\frac{T\cdot z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{T}{(1-z^{-1})\cdot GH(z)}$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\cdot GH(z)}{zT}\Rightarrow e_{ss}^{*}=\frac{1}{K_v}$$

6. Respuesta temporal – Respuesta permanente

- El tipo de sistema viene dado en función del número de polos N en z=1 (integradores en GH). El valor de K_p y K_v depende del tipo de sistema.

- El significado físico de las constantes de error estático es el mismo que el visto en tiempo continuo, excepto que estas dan información solo en los instantes de muestreo.

$$GH(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \cdot \frac{A(z)}{B(z)}$$

7. Representación del lugar de las raíces

- Se aplica de la misma forma que en sistemas en tiempo continuo, salvando la diferente interpretación de la ubicación de los polos en el plano z.

- El parámetro de interés es la ganancia K ($-\infty < K < +\infty$)

$$1 + K \frac{(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_1)\cdots(z+p_n)} = 0$$

7. Representación del lugar de las raíces

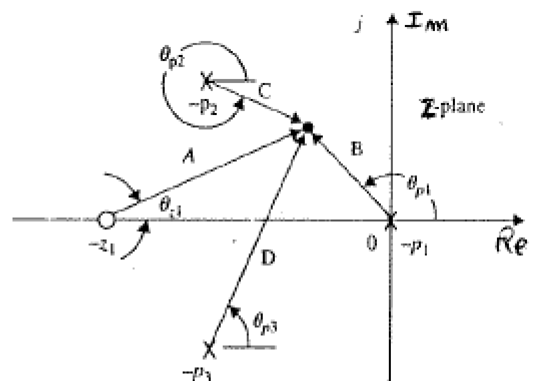
- La ganancia en lazo abierto F(z) debe cumplir las condiciones de módulo y fase.

- Condición de módulo: |F(z)|=1

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} |z+z_i|}{\prod_{j=1}^{n} |z+p_j|} = \frac{1}{|K|}$$

- Condición de fase:

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(z+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(z+p_j) = \pm 180^\circ(2p+1)$$



7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado (K>0)

- 1) El trazado se inicia en los n polos (K=0) y termina en los m ceros (K=∞). Un número de n-m ramas terminan asintóticamente en infinito.

- 2) Los tramos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que quedan a la izquierda de un número impar de ceros+polos.

- 3) Asíntotas: ángulo de asíntota = 180(2p+1)/(n-m),   p=0,1,2,…,n-m

Centroide = (∑ parte real polos finitos F(z) - ∑ parte real ceros finitos F(z))/(n-m)

7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado (K>0)

- 4) Puntos de bifurcación (entre polos adyacentes) y confluencia (entre ceros adyacentes) son aquellos valores de z_0 en los que se cumple:

$$dK/dz = 0 \quad \text{-->} \quad d[-B(z)/A(z)]/dz = 0$$

Si el valor de K correspondiente a la raíz z_0 es positivo el punto es de bifurcación o de confluencia. Si K es negativo el punto no es ni de bifurcación ni de confluencia.

- 5) Cortes con el eje imaginario: haciendo z=jv, 1+F(jv)=0, e igualando a cero las partes real e imaginaria se obtienen los valores de v y K.

7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado (K>0)

- 6) Cortes con la circunferencia de radio unidad: criterio de Jury.
- 7) Determinación del valor de K para un punto concreto del lugar de las raíces: aplicación de las condiciones de módulo y fase.

7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado (K<0)

Condición de fase:

$$\angle F(z) = 0 \quad \text{ó} \quad \angle F(z) = \pm 360^o p \quad \text{con p=0, 1, 2, ...}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(z+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(z+p_j) = \pm 360^o p$$

- 1) El trazado se inicia en los ceros y termina en los polos.
- 2) Los tramos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que quedan a la izquierda de un número par de ceros+polos.
- 3) Asíntotas: ángulo de asíntota = 180(2p)/(n-m), p=0,1,2,...,n-m

Centroide = (∑ parte real polos finitos F(z) - ∑ parte real ceros finitos F(z))/(n-m)

7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado (K<0)

- 4) Puntos de bifurcación (entre polos adyacentes) y confluencia (entre ceros adyacentes) son aquellos valores de z_0 en los que se cumple:

$$dK / dz = 0 \quad \text{-->} \quad d[-B(z)/A(z)] / dz = 0$$

Si el valor de K correspondiente a la raíz z_0 es negativo se trata del punto buscado. Si K es positivo el punto no es ni de bifurcación ni de confluencia.

- 5) Cortes con el eje imaginario: haciendo z=jv, 1+F(jv)=0, e igualando a cero las partes real e imaginaria se obtienen los valores de v y K.

7. Representación del lugar de las raíces

Ejemplo: trazado del lugar de las raíces para K>0

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

- Ganancia en lazo abierto para T=1s.

$$F(z) = GH(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

Ecuación característica:

$$z^2 - 1.368z + 0.368 + 0.632Kz = 0$$

7. Representación del lugar de las raíces

- Ceros: $z_1=0$, $z_2=\infty$ Polos: $p_1=1$, $p_2=0.368$
- Tramos del eje real pertenecientes al lugar de las raíces:

  $0.368<z<1$ y $z<0$

- Asíntota: 180° Centroide: 1.368
- Puntos de bifurcación y de confluencia:

$$K = -\frac{(z-1)(z-0.368)}{0.632\, z} \qquad \frac{dK}{dz} = -\frac{0.632z^2 - 0.632\cdot 0.368}{0.632z^2} = 0$$

$$z = 0.606 \;,\; K=0.244 \qquad z=-0.606 \;,\; K=4.08$$

7. Representación del lugar de las raíces

- Cortes con el eje imaginario:

$$z = jv$$

$$1 + GH(z) = 0 \implies -v^2-(1.368-0.632K)jv+0.368 = 0$$

$$v=\pm 0.606 \qquad K=2.164$$

- Cortes con circunferencia de radio unidad: único corte en z=-1

F(-1)=GH(-1)=-1 -> 4.32

7. Representación del lugar de las raíces

- Representación gráfica: