Universidad Rey Juan Carlos

Grado en Ingeniería en Sistemas Audiovisuales y Multimedia

Campos y ondas

Tema 3. Ondas planas

Ondas planas. Índice

- Fasores
- Ecuación de ondas planas en el vacío
- Ondas planas en medios con pérdidas
- Planteamiento general
- Transmisión de potencia: vector de Poynting
- Incidencia perpendicular
- Incidencia oblicua
- Polarización

Ondas planas. Fasores

En electromagnetismo, y otras disciplinas, es común trabajar con campos que presentan una variación periódica, más concretamente senoidal (o cosenoidal). Presentan la forma:

$$A(x, y, z, t) = A_0(x, y, z)\cos(\omega t + \varphi(x, y, z))$$

En donde se separa la dependencia espacial (en *x, y, z*) de la temporal (*t*) . Aprovechando la identidad de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Se puede expresar *A(x, y, z, t)* en función de la identidad de Euler con una sencilla manipulación.

$$Ce^{j\theta} = C\cos(\theta) + jC\sin(\theta)$$

Y haciendo $\theta = \omega t + \varphi(x, y, z)$ y $C = Ao(x, y, z)$

$$A(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left[A(x, y, z)e^{j\varphi(x,y,z)}e^{j\omega t}\right]$$

Ondas planas. Fasores

Propiedad importante de los fasores: sencillez en su derivación en integración con **respecto al tiempo**:

$$A = \mathrm{Re}[A_s(x, y, z)\exp(j\omega t)]$$

- **Derivación**

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}[A_S(x, y, z)(\exp(j\omega t))])$$

$$= \mathrm{Re}\left[A_S(x, y, z)\frac{\partial}{\partial t}(\exp(j\omega t))\right] = \mathrm{Re}[A_S(x, y, z) j\omega \exp(j\omega t)]$$

$$\boxed{\frac{\partial A_s}{\partial t} = j\omega A_s}$$

- **Integración**

$$\int A dt = \int \mathrm{Re}[A(x, y, z)\exp(j\omega t)]\, dt = \mathrm{Re}\left[A(x, y, z)\int \exp(j\omega t) dt\right]$$

Ondas planas. Fasores

El fasor de A es: $$\mathbb{A}(x,y,z) = A(x,y,z)e^{j\varphi(x,y,z)}$$

O abreviado: $$\mathbb{A} = Ae^{j\varphi}$$

Ejemplos:

- **Expresar en forma fasorial el campo:**

$$\vec{A} = 10\cos(10^8 t - 10x + 60º)\,\hat{z} \quad \Rightarrow \vec{\mathbb{A}} = 10\,\hat{z}\,e^{-j10x}e^{j60º} = 10\,\hat{z}\,e^{j(60º-10x)}$$

- **Dar la forma temporal del campo:**

$$\vec{\mathbb{A}} = \frac{20}{j}\hat{x} + 10\exp\left(\frac{j2\pi x}{3}\right)\hat{y}$$

$$\vec{\mathbb{A}} = 20(-j)\hat{x} + 10\exp\left(\frac{j2\pi x}{3}\right)\hat{y} = 20\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + 10\exp\left(\frac{j2\pi x}{3}\right)\hat{y}$$

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

Planteamiento: Se supone que algún dispositivo genera campos eléctricos y magnéticos que de alguna manera han sido transmitidos al espacio. Partimos de las Ecs. de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_V$$

a: $$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

b: $$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Hacemos el rotacional de la ecuación b:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t}$$

Aplicamos al primer miembro la igualdad vectorial: $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0$$

En este punto se hacen varias suposiciones:

1. No hay carga en el espacio. $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \rho_V = 0$ $\Rightarrow \sigma = 0$
2. Vacío => $\epsilon = \epsilon_0$; $\mu = \mu_0$
3. Variación temporal armónica (senoidal) => **uso de fasores**
4. El campo eléctrico solo tiene componente en x y ésta solo depende de z:

$$\vec{\mathbb{E}} = E_x(z)\hat{x}$$

En forma de fasores

$$\nabla^2 \vec{E} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{} \qquad \frac{\partial^2 E_x}{}} \qquad \boxed{\frac{d^2 E_x}{}}$$

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

Este tipo de ecuaciones diferenciales tienen solución conocida.

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \mathbb{E}_{Sx} \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbb{E}_x}{\partial z^2} = -k_0^2 \mathbb{E}_x$$

Una de las soluciones a esta ecuación es:

$$E_x(z,t) = E_{0x} \cos(\,\omega t - k_0 z + \varphi_1) + E'_{0x} \cos(\,\omega t + k_0 z + \varphi_2)$$

Nos fijamos solo en la onda que se propaga según el eje +z. Además se asigna a las fases φ_1 y φ_2 un valor inicial igual a cero. La solución final es:

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x}\,\hat{x}\cos(\,\omega t - k_0 z)$$

$$\vec{\mathbb{E}}(z) = E_{0x}\,\hat{x}\exp(\,-jk_0 z)$$

En donde:

$$k_0 = \beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

Constante de fase ó Número de onda

y

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3.10^8 m/s$$

Velocidad de propagación

$$\omega = 2\pi f$$

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

Cálculo del campo H a partir del E

Con las restricciones impuestas al campo E:

- E perpendicular a z
- E solo función de z
- E solo con componente en x

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -j\omega\mu\,\vec{\mathbb{H}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbb{E}_x}{dz} = -j\omega\mu_0\mathbb{H}_y$$

$$\mathbb{E}_x = E_{0x}\exp(-jk_0z) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbb{E}_x}{dz} = -jk_0E_{0x}\exp(-jk_0z)$$

$$\mathbb{H}_y = \frac{-1}{\;}(-jk_0E_{0x}\exp(-jk_0z)) = E_{0x}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\;}}\exp(-jk_0z)$$

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

$$\mathbb{H}_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{0x} \exp(-jk_0 z) = \frac{1}{\eta_0} \mathbb{E}_x$$

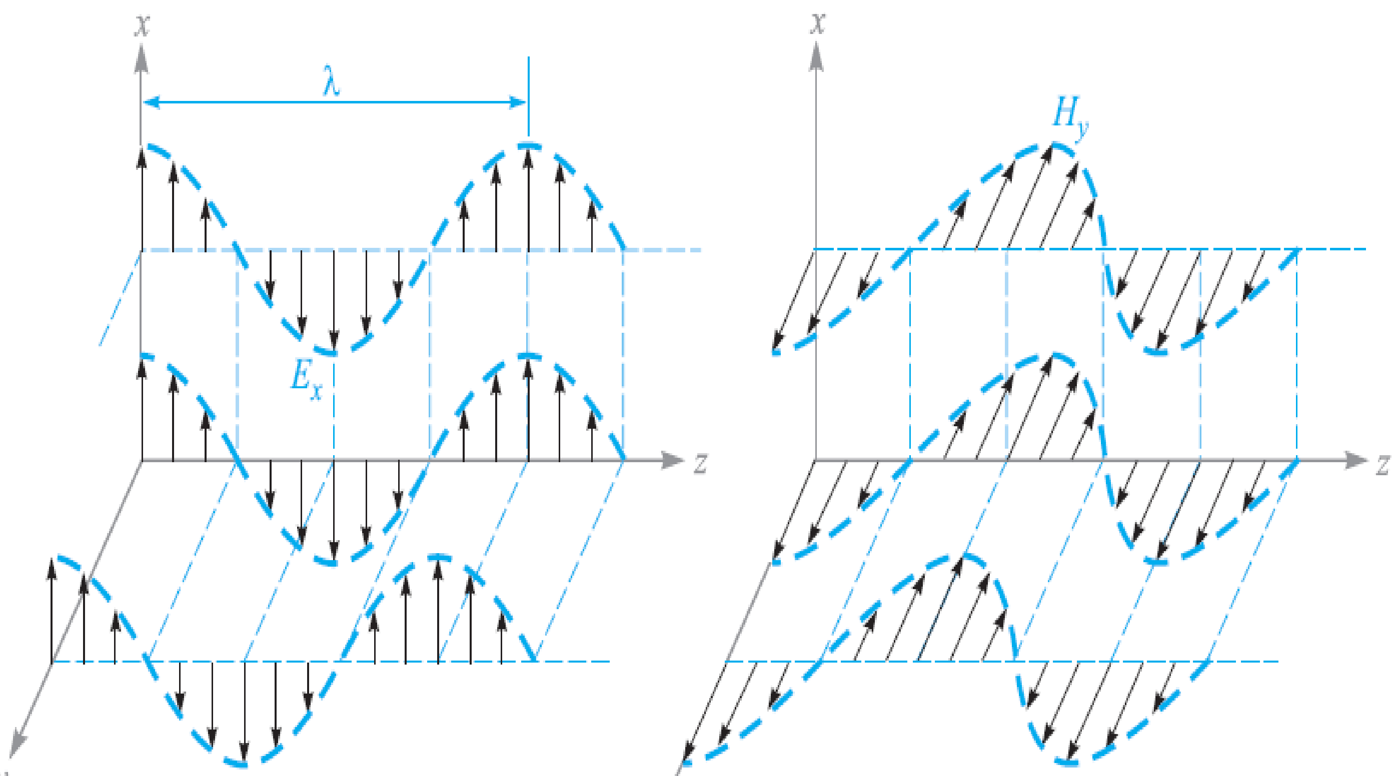
$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{H}}_y = \frac{1}{\eta_0} \mathbb{E}\ \hat{y}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_x = \eta_0 \mathbb{H}_x}$$

$$\boxed{\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \equiv \text{impedancia intrínseca del medio } (\Omega)}$$

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

El campo H es perpendicular al campo E y a la dirección de propagación.



Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

Resumiendo, las expresiones de una onda plana que se propaga en el vacío, con las restricciones hechas en la consecución de la solución son:

Campo eléctrico:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)\hat{x} \quad \mathbf{V/m}$$

Eje coordenado del campo.

Amplitud señal: **V/m**

Variación temporal

Información sobre la dirección de propagación y el medio: variación espacial

$$\boxed{- \; k_0 z}$$

-: Dirección positiva en el eje en el que se propaga
+: Dirección negativa

Características de propagación en relación al

Eje en el que se propaga: z

Ondas planas. Ecuación de ondas en el vacío

Campo magnético:

$$\vec{H}(z,t) = H_0 \cos(\omega t - k_0 z)\hat{y}$$

Amplitud
campo magnético.
A/m
Relación con la del campo eléctrico

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0}$$

Misma información
que en el campo
eléctrico.

Relación entre las direcciones y
sentido de los vectores E, H y la dirección
de propagación

Importante: coherencia entre

Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

Para medios distintos del vacío, todo lo expuesto es válido con la diferencia de que las constantes características del medio se sustituyen por:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad \mu = \mu_r \mu_0$$

Con lo que los parámetros que aparecen en las expresiones para el campo eléctrico, Magnético, constante de fase e impedancia intrínseca quedan.

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x}$$

$$\vec{H}(z,t) = H_0 \cos(\omega t - kz)\hat{y}$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0} = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = k_0\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

Si en el desarrollo realizado para llegar a la ecuación diferencial que conduce a la solución para los campos E y H, permitimos que $\sigma! = 0$ incluimos las pérdidas en nuestro modelo.

Ec. en forma temporal
$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0$$

Ec. en forma fasorial
$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial z^2} + \mathbb{E}(\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\sigma\mu) = 0$$

Para tener la ecuación diferencial en la forma similar al desarrollo para el caso Con pérdidas, el coeficiente de E_s queda:

$$\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\sigma\mu = \omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = \omega^2\mu\varepsilon_c$$

Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

Las diferencias con respecto a medios sin pérdidas son:

•La constante ϵ_c es ahora compleja.

•ϵ_c ofrece información entre el comportamiento **aislante** y **conductor** del material. Aislante implica $\sigma != 0$ mientras que conductor es $\sigma = 0$.

•Si $$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1 \Rightarrow \text{ AISLANTE}$$

•Si $$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1 \Rightarrow \text{ CONDUCTOR}$$

El carácter aislante o conductor de un medio **depende de la frecuencia.**

Ejemplo. La tierra húmeda ha sido caracterizada y presenta un valor para σ de: $\sigma = 0'01$

•A una frecuencia de 1kHz: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1'8\,10^4$ <----> Buen conductor

Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

Resolvemos la ecuación diferencial.

$$\boxed{\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial z^2} + \mathbb{E}\omega^2 \mu \varepsilon_c = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial z^2} - \mathbb{E}\gamma^2 = 0}$$

$$\boxed{\gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c}$$

La solución de la ecuación conduce a dos posibles valores para el coeficiente del término en $\mathbb{E}$, el positivo o el negativo. Nos quedamos con el positivo

$$\boxed{\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \Rightarrow j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}}$$

$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta}$ es un número complejo

Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

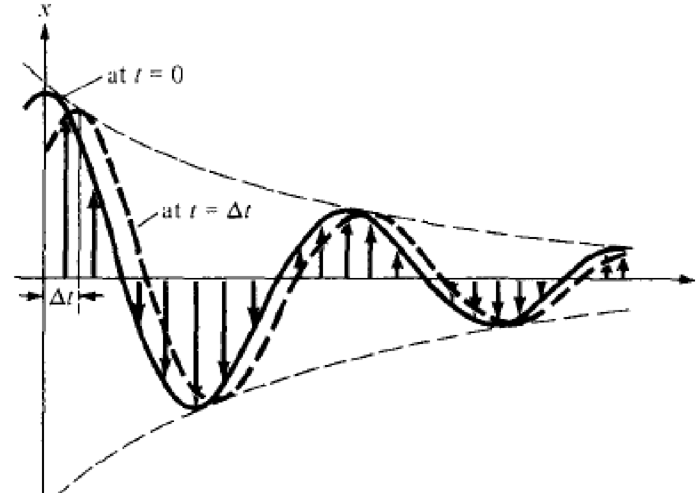
La solución de la ecuación de ondas es la misma que la de los medios sin pérdidas, pero con la nueva constante γ: en lugar de k_0 (ó β)

$$\vec{\mathbb{E}}(z) = E_0 \exp(-\gamma z)\hat{x} = E_0 \exp(-\alpha z)\exp(-jk_0 z)\hat{x}$$

Pasando a su expresión temporal:

$$\vec{E}\,(z,t) = E_0 \exp(-\alpha z)\cos(\omega t - jk_0 z)\,\hat{x}$$

V/m



Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

El campo magnético:

$$\boxed{\vec{\mathbb{H}}(z) = H_0 \exp(-\gamma z)\hat{y} = H_0 \exp(-\alpha z)\exp(-jk_0 z)\hat{y}} \qquad \text{A/m}$$

La relación con el campo eléctrico es aparentemente la misma que en los medios sin pérdidas:

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$ Solo que ahora: $$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$$ es un número complejo

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$$

EL cálculo de la parte real e imaginaria es laborioso y por ello se usan aproximaciones.

Ondas planas. Ec. ondas en medios con pérdidas

Las aproximaciones que se hacen son:

- Buenos dieléctricos o aislantes: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$

$$\boxed{\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$ Np/m

$$\boxed{\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$ Np/m

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$ m/s

$$\boxed{\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$ Ω

- Buenos conductores $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$

Ondas planas. Planteamiento general

Una vez obtenidas las ecuaciones de los campos, relajamos dos de las suposiciones hechas para llegar a ellas:

- Ahora el campo E puede tener cualquier componente, no solo x
- cada componente tiene separación de variables. Es decir (por ejemplo, la componente en x):. $\boxed{\mathbb{E}_x = f(x)g(y)h(z)}$

En estas condiciones: $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

Recordar que k es el factor que multiplicaba a z y que incluía los datos acerca de la dirección de propagación de la onda: kz

$$\vec{\mathbb{E}} = \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r})$$

En donde $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ Vector de propagación de la onda

a

Ondas planas. Planteamiento general

La expresión temporal del campo es:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right) \quad \text{V/m}$$

Cumpliéndose además que:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \qquad \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}} \times \hat{k} = 0$$

Expresa que, tanto el campo E, como el H, como la dirección de propagacion son perpendiculares entre si.

Ondas planas. Vector de Poynting

El **vector de Poynting indica la potencia que transporta una onda plana**. Por lo tanto es de gran importancia.

Para su cálculo usaremos las ecuaciones de Maxwell. Partimos del rotacional de H al que multiplicamos escalarmente en los dos miembros por E

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Usando la expresion vectorial:

$$\nabla\left(\vec{M} \times \vec{N}\right) = -\vec{M} \cdot \left(\nabla \times \vec{N}\right) + \vec{N} \cdot \left(\nabla \times \vec{M}\right)$$

Ondas planas. Vector de Poynting

El rotacional del campo eléctrico es, segun la correspondiente ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que usamos en la expresión inicial, quedando:

$$-\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Aislamos el término que relaciona los campos de distinta naturaleza (el eléctrico y el magnético:

$$-\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Usando $\vec{E} = \varepsilon\vec{D}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$ $\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ y $\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

Ondas planas. Vector de Poynting

Recordando que las energías almacenadas por los campos eléctricos y magnéticos están relacionadas con el producto escalar de ambos campos:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V (\vec{D}\cdot\vec{E})dV$$ para el campo eléctrico, y

$$W_H = \frac{1}{2}\int_V (\vec{B}\cdot\vec{H})dV$$ para el campo magnético.

Es interesante buscar una expresión para estos productos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E}) = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E} + \vec{D}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 2\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E})$$

$$\vec{B}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{H})$$

Ondas planas. Vector de Poynting

$$-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{E}\cdot\vec{J}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

La expresión a la que llegamos dice lo que sucede en un punto del espacio. Cada término tiene dimensiones de potencia por unidad de tiempo. Si integramos en un volumen dado (región de interés por algún motivo):

$$-\oint_V\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV=\int_V\left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)dV+\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)dV$$

Aplicamos el teorema de la divergencia en el primer miembro:

Ondas planas. Vector de Poynting

El resultado expresa el balance de potencia generado por los campos E y H en una superficie S.

El primer miembro da la potencia que abandona la superficie de integración.

El segundo miembro indica que esa potencia tiene su origen en tres causas:

- La potencia disipada por la existencia de un material con pérdidas: σ !=0
- La variación de la potencia causada por el campo eléctrico,
- La variación de la potencia causada por el campo magnético.

El vector de Poynting es:

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} \qquad [\mathrm{W/m^2}]$$

es la densidad de potencia (W/m^2) transportada por la onda plana mediante

Ondas planas. Vector de Poynting

Usando las expresiones encontradas para los camos eléctrico y magnético en una onda plana:

$$\vec{E} = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\,\hat{x}$$

$$\vec{H} = H_{0y}\cos(\omega t - kz)\,\hat{y}$$

El vector de Poynting es:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E_{0x}^2}{\eta}\cos^2(\omega t - kz)\,\hat{z}$$

Si los campos tienen lugar en un medio con pérdidas: $\sigma = !\,0 \text{ y } \eta = |\eta|_{\angle\theta}$

El campo E es el mismo que antes, y el H

$$\vec{H} = \frac{E_{0x}}{\eta}\exp(-\alpha z)\cos(\omega t - kz - \theta)\,\hat{y}$$

E^2

Ondas planas. Vector de Poynting

La expresión queda en función del tiempo. Interesa saber el valor medio de la potencia transmitida:

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_{0x}^2}{|\eta|} \exp(-2\alpha z)\cos(\omega t - kz)\ \cos(\omega t - kz - \theta)\, dt$$

Gracias a la expresion: $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_{0x}^2}{|\eta|} \exp(-2\alpha z)\cos\theta$$

Usando fasores:

$$\vec{\mathbb{E}} = E_{0x}\exp(\alpha z)\exp(-jkz)\,\hat{x}$$

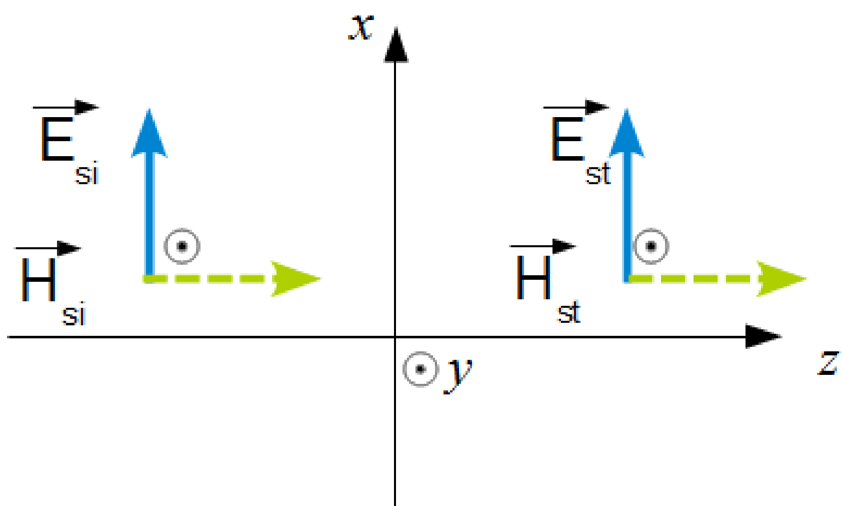
$$\langle \vec{S_z} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^{\,*}\right]$$

Ondas planas. Cambio de medio (incidencia normal)

Caracterización de una onda cuando pasa de un medio a otro de distintas características electromagnéticas: ε y μ

$\varepsilon_1 \ \mu_1$ 1

2 $\varepsilon_2 \ \mu_2$



Condiciones de contorno

$$\vec{E}_{si} = \vec{E}_{st}$$

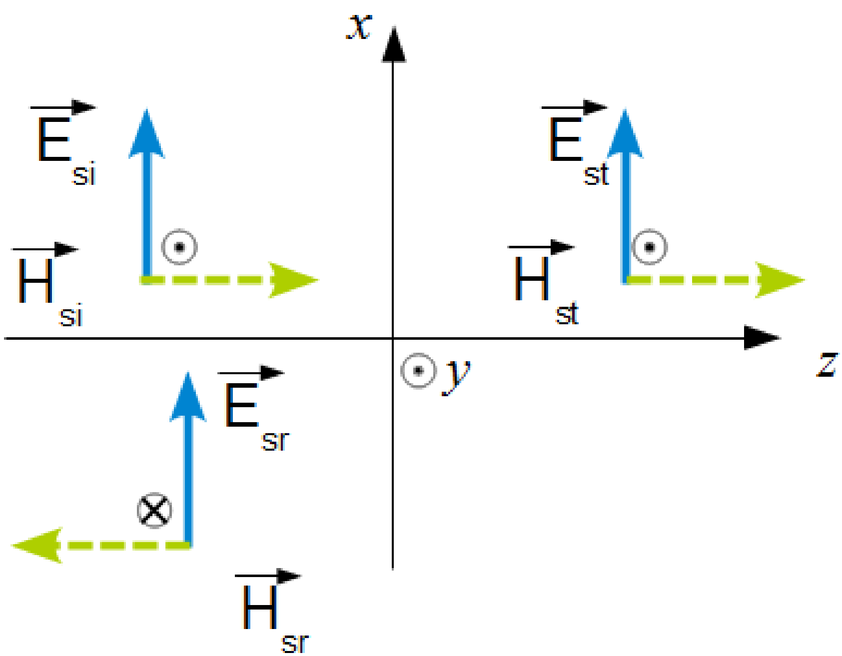
$$H_{si} - Hst = Ks$$

Considerando que no hay densidad superficial de corriente en la separación de los medios:

$$H_{si} - Hst = 0 \Rightarrow Hsi = Hst$$

Ondas planas. Cambio de medio (incidencia normal)

Conclusión: Existe una onda reflejada (con su campo E y H) que se propaga en la dirección contraria a la incidente. Finalmente (expresandocon la incidente y la reflejada:



$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

(*) $$H_{0i} - H_{0r} = H_{0t}$$

$$\frac{E_{0i}}{\eta_1} - \frac{E_{0r}}{\eta_1} = \frac{E_{0t}}{\eta_2}$$

Ondas planas. Cambio de medio (incidencia normal)

Suponiendo que se conocen las características de la onda incidente, se pueden calcular las de las ondas transmitida y reflejada a partir de estas ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} E_{0i} + E_{0r} &= E_{0t} \\ \frac{E_{0i}}{\eta_1} - \frac{E_{0r}}{\eta_1} &= \frac{E_{0t}}{\eta_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{0r} = E_{0i}\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

$$\boxed{E_{0t} = E_{0i}\frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\ldots}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\ldots}$$

$$\boxed{\tau = 1 + \Gamma}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia normal)

Expresiones de los campos eléctricos y magnéticos incidentes, transmitidos y reflejados. En el medio 1 ***coexisten la onda incidente con la reflejada*** y en el medio 2 solo está la ***transmitida***

(Pasamos a trabajar con fasores)

MEDIO 1

$$\vec{\mathbb{E}}_i = E_{0i}\exp(\gamma_1 z)\hat{x} \qquad V/m$$

$$\vec{\mathbb{E}}_r = E_{0i}\Gamma\exp(\gamma_1 z)\hat{x} \qquad V/m$$

$$\vec{\mathbb{H}}_r = \frac{E_{0i}}{\eta_1}\Gamma\exp(\gamma_1 z)\,(-\hat{y}) \qquad A/m$$

MEDIO 2

$$\vec{\mathbb{E}}_t = E_{0i}\tau\exp(\gamma_2 z)\,\hat{x} \qquad V/m$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia normal)

Como consecuencia, en el **medio uno** hay una superposición de dos ondas de las mismas características pero propagándose en sentidos contrarios. El resultado es ***una onda estacionaria.***

$$\vec{\mathbb{E}}_1 = \vec{E}_{i1} + \vec{E}_{r1} = E_{0i} \exp(-\gamma_1 z)\,\hat{x} + E_{0i}\Gamma \exp(\gamma_1 z)\hat{x} \quad V/m$$

$$\vec{\mathbb{E}}_1 = E_{0i}(\exp(-\gamma_1 z) + \Gamma \exp(\gamma_1 z))\hat{x} \quad V/m$$

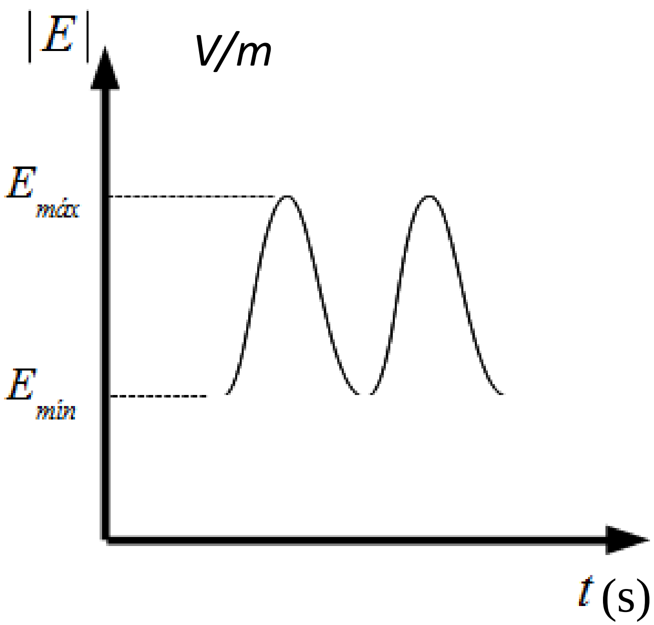
Si consideramos que el medio es sin pérdidas, es decir,

$$\sigma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = jk_1$$

$$\vec{\mathbb{E}}_1 = E_{0i} \exp(-jk_1 z)(1 + \Gamma \exp(2jk_1 z))\hat{x} \quad V/m$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia normal)

El módulo del campo eléctrico (y análogamente el magnético) presentan una variación sinusoidal de amplitud constante cuyo máximo y mínimo está definido por el factor:



$$\frac{\left|\vec{\mathbb{E}}_1(z)\right|}{|E_{0i}|} = |1 + \Gamma \exp(2jk_1 z)|$$

El módulo del campo será máximo o mínimo en el medio 1, cuando lo sea el factor:

Se define la relación de onda estacionaria ***ROE*** así:

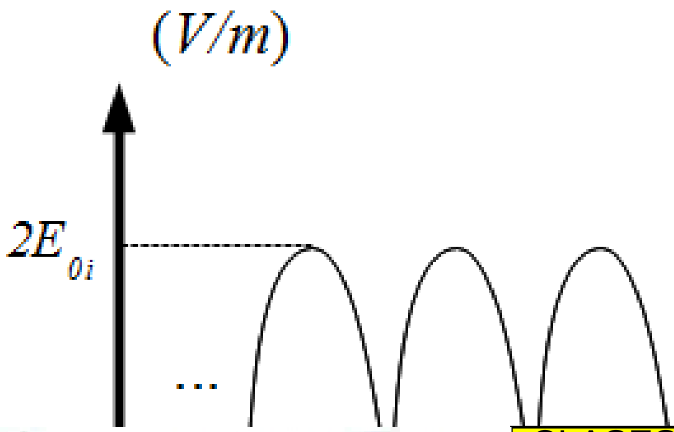
$$ROE = s = \frac{E_{max}}{} = \frac{1+|\Gamma|}{} \qquad 1 \leq s \leq \infty$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia normal)

Ejemplo: Onda incidente en una frontera en la que el medio 1 es aislante (σ_1=0) y el 2 es de alta conductividad ($\sigma_2 \Rightarrow \infty$):

$$\Gamma = -1 \; y \; \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Toda la potencia se refleja}$$

$$\vec{\mathbb{E}}_1 = E_{0i}\,(\exp(-j\beta_1 z) - \exp(-j\beta_1 z))\hat{x} = -2jEi_0\,\mathrm{sen}(\beta_1 z)\hat{x} \quad V/m$$



$$|\vec{\mathbb{E}}_1| = 2E_{0i}\,|\mathrm{sen}(\beta_1 z)| \quad V/m$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia normal)

En el dominio del tiempo:

$$\vec{E}_1(z,t) = \mathrm{Re}[\mathbb{E}_1 \exp(\omega t)]\hat{x}$$

$$\vec{E}_1(z,t) = 2E_{0i}\,\mathrm{sen}(\beta_1 z)\mathrm{sen}(\omega t)]\hat{x} \qquad V/m$$

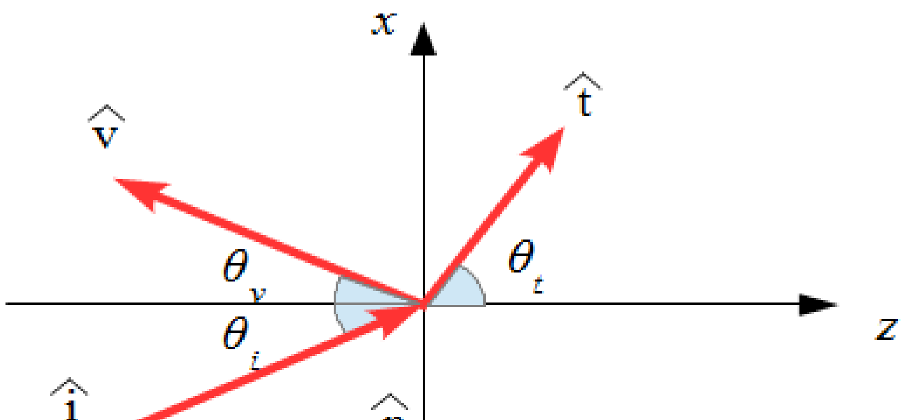
Y el campo magnético en el medio 1:

$$\vec{H}_1(z,t) = H_{0i}\,\mathrm{sen}(\beta_1 z)\mathrm{sen}(\omega t)]\,\hat{y}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Los ángulos definidos por las trayectorias *i*, *v* y *t*:

- Están en el mismo plano: **plano de incidencia** (en el caso de la ilustración, el plano xz)
- Los ángulos cumplen la **ley de Snell : sen** $\boldsymbol{\theta_v}$**= sen** $\boldsymbol{\theta_i \Rightarrow \theta_v = \theta_i}$
- También se cumple: $\boldsymbol{\gamma_1}$**sen** $\boldsymbol{\theta_i = \gamma_2}$**sen** $\boldsymbol{\theta_t \Rightarrow \theta_v = \theta_i}$



$$\vec{\mathbb{E}}_i = \vec{E}_{0i}\exp(-\gamma_1\,\hat{i}\,.\,\vec{r})$$

$$\vec{\mathbb{E}}_v = \vec{E}_{0v}\exp(-\gamma_1\hat{v}.\vec{r})$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Los ángulos definidos por las trayectorias i, v y t cumplen las siguientes relaciones :

$$\text{sen}\ \theta_v = \text{sen}\ \theta_i \ \Rightarrow \ \theta_v = \theta_i$$ Ley de Snell

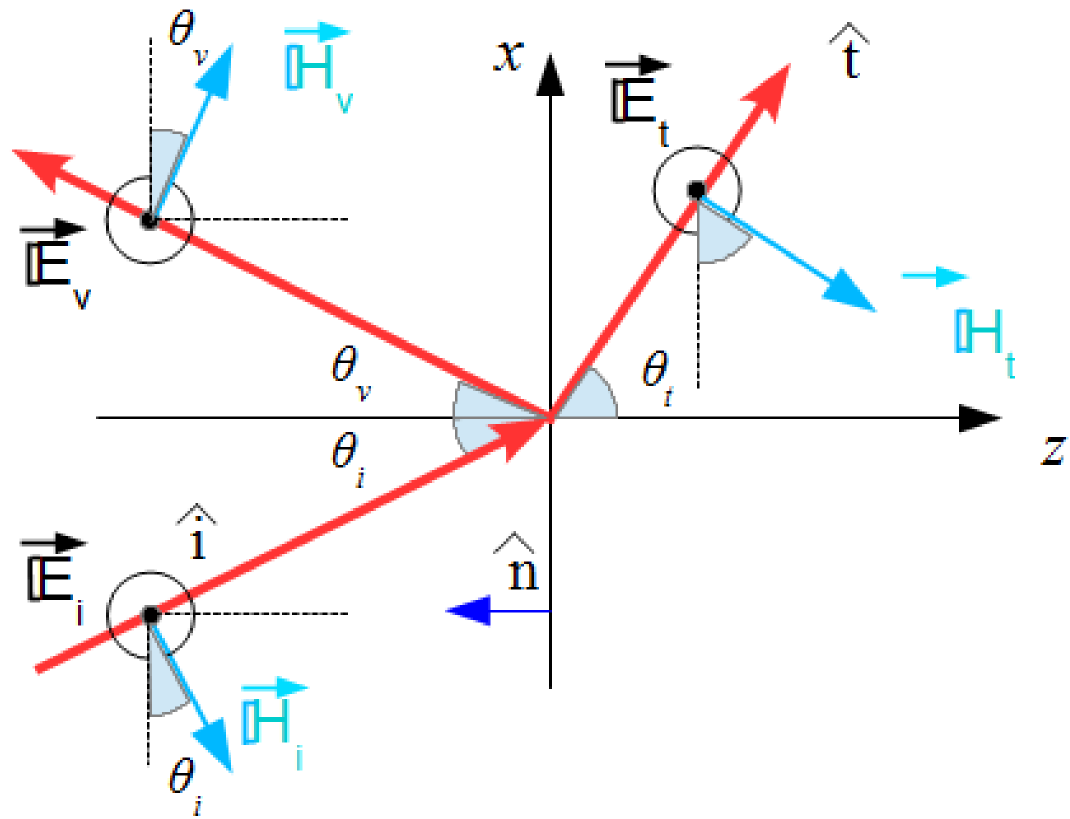
$$\gamma_1 \text{sen}\theta_i = \gamma_2 \text{sen}\theta_t$$ Relación entre ángulos de los dos medios

Y la relación entre los senos de los ángulos de **incidencia** y **transmisión** se convierte en:

$$\frac{\text{sen}\theta_t}{\text{sen}\theta} = \frac{\beta_1}{\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon}}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Caso I.
Inciencia perpendicular: el **campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia**.



$\vec{E} = E \exp(-\gamma \hat{i} \cdot \vec{r})\hat{y}$ $\vec{E} = E (\ldots \hat{\ } \cdot \vec{r}) \hat{\ }$

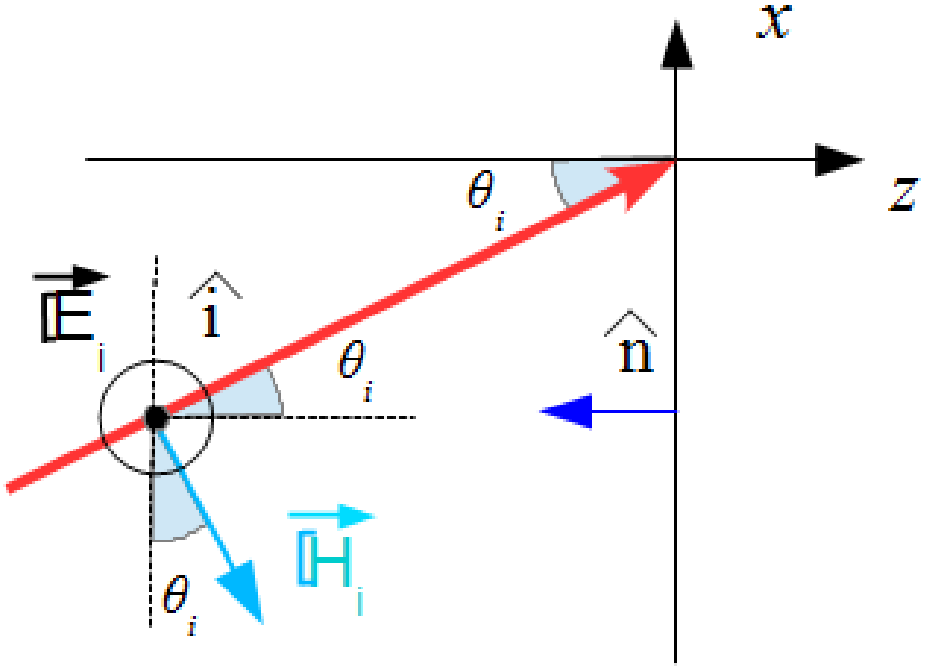
Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

$$\vec{\mathbb{E}}_i = E_{0i}\, \hat{y} \exp(-\gamma_1\, \hat{i}.\vec{r})$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$$

$$\hat{i} = \hat{x}\,\mathrm{sen}\theta_i + \hat{z}\cos\theta_i$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



$$\vec{\mathbb{E}}_i = E_{0i}\, \hat{y} \exp(-\gamma_1(x\,\mathrm{sen}\theta_i + z\cos\theta_i))$$

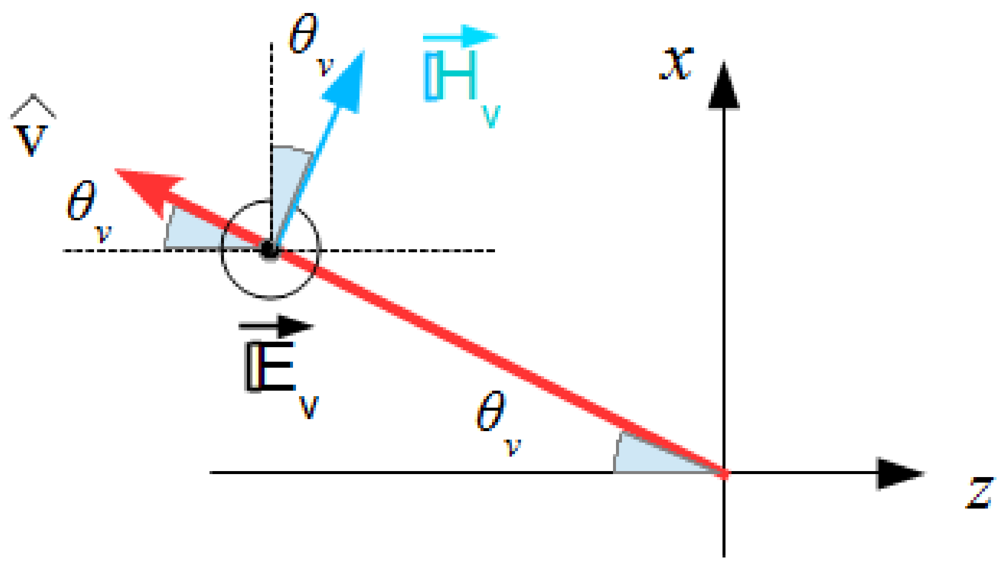
Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

$$\vec{\mathbb{E}}_v = E_{0v}\,\hat{y}\exp(-\gamma_1\,\hat{v}.\vec{r})$$

$$\gamma_1=\alpha_1+j\beta_1$$

$$\hat{v} = \hat{x}\mathrm{sen}\theta_i - \hat{z}\cos\theta_i$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



$$\vec{\mathbb{E}}_v = E_{0v}\,\hat{y}\,\exp(-\,\gamma_1(x\mathrm{sen}\theta_v + z\cos\,\theta_v))$$

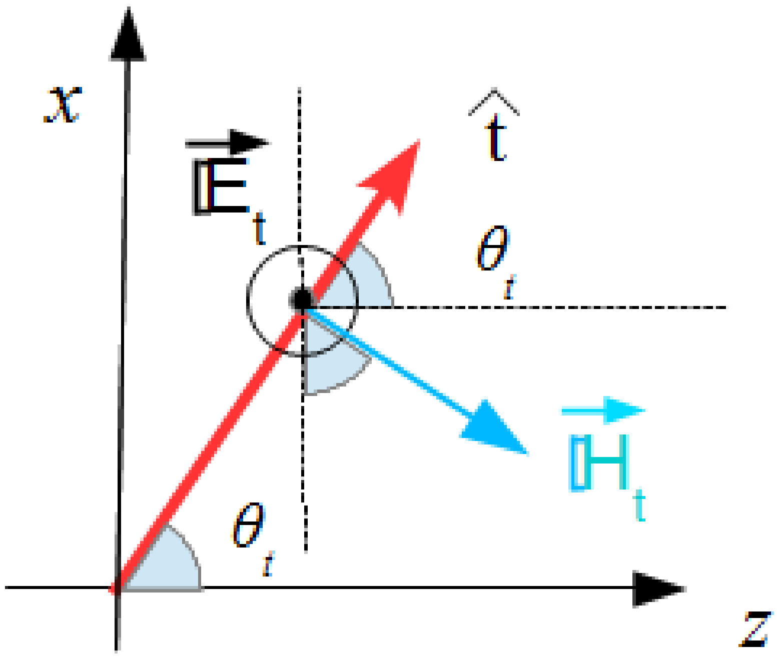
Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

$$\vec{\mathbb{E}}_t = E_{0t}\,\hat{y}\exp(-\gamma_2\hat{t}.\,\vec{r})$$

$$\gamma_2=\alpha_2+j\beta_2$$

$$\hat{t} = \hat{x}\,\text{sen}\theta_t + \hat{z}\cos\theta_t$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



$$\vec{\mathbb{E}}_t = E_{0t}\,\hat{y}\,\exp(-\,\gamma_2(x\,\text{sen}\theta_t + z\cos\theta_t))$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Supuesto que la **onda incidente es el dato de partida** y que se quiere conocer las ondas **transmitida** y **reflejada** se tienen que averigüar cuatro incógnitas: E_{0v} , $E_{0t,}$ θ_v , θ_t

$$\vec{\mathbb{E}}_v = E_{0v}\,\hat{y}\,\exp(-\,\gamma_1(x\mathrm{sen}\theta_v + z\cos\theta_v))$$

$$\vec{\mathbb{H}}_v = \frac{E_{0v}}{\eta_1}(\hat{x}\cos\theta_v\ + \hat{z}\mathrm{sen}\theta_v)\exp(-\,\gamma_1(x\mathrm{sen}\theta_v - z\cos\theta_v))$$

$$\vec{\mathbb{E}}_t = E_{0t}\,\hat{y}\,\exp(-\,\gamma_2(x\mathrm{sen}\theta_t + z\cos\theta_t))$$

$$\vec{\mathbb{H}}_t = \frac{E_{0t}}{\eta_2}(-\hat{x}\cos\theta_t\ + \hat{z}\,\mathrm{sen}\theta_t)\exp(-\,\gamma_2(x\mathrm{sen}\theta_t + z\cos\theta_t))$$

Aplicamos condiciones de contorno en la superficie de separación (z = 0):

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Como se cumple la ley de Snell: θ_i , θ_v

$$(E_{0i} + E_{0v})\exp(-\gamma_1 x\ \mathrm{sen}\theta_i) = E_{0t}\exp(-\gamma_2 x \mathrm{sen}\theta_t)$$

Y esta expresión debe cumplirse para todo valor de x porque el plano y=0 es la superficie de separación de los medios. Con ello:

$$\exp(-\gamma_1 x\ \mathrm{sen}\theta_i) = \exp(-\gamma_2 x \mathrm{sen}\theta_t) \Rightarrow \gamma_1 x\ \mathrm{sen}\theta_i = \gamma_2 x \mathrm{sen}\theta_t$$

$$\boxed{\gamma_1\ \mathrm{sen}\theta_i = \gamma_2 \mathrm{sen}\theta_t}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Finalmente se aplica la condición de contorno para el campo magnético, que dicen que la componente tangencial se conserva si no hay corriente en la superficie que separa los medios. Considerando ese caso aquí:

$$-\frac{E_{0i}}{\eta_1}\cos\theta_i \exp(-\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i) + \frac{E_{0v}}{\eta_1}\cos\theta_v \exp(-\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_v) = \frac{E_{0t}}{\eta_2}\cos\theta_t \exp(-\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t)$$

Al igual que antes: $\boxed{\theta_i = \theta_v}$

$$\exp(-\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i)\cos\theta_i\left(\frac{E_{0i}}{\eta_1} - \frac{E_{0v}}{\eta_1}\right) = \frac{E_{0t}}{\eta_2}\cos\theta_t \exp(-\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t)$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

$$E_{0i} + E_{0v} = E_{0t}$$

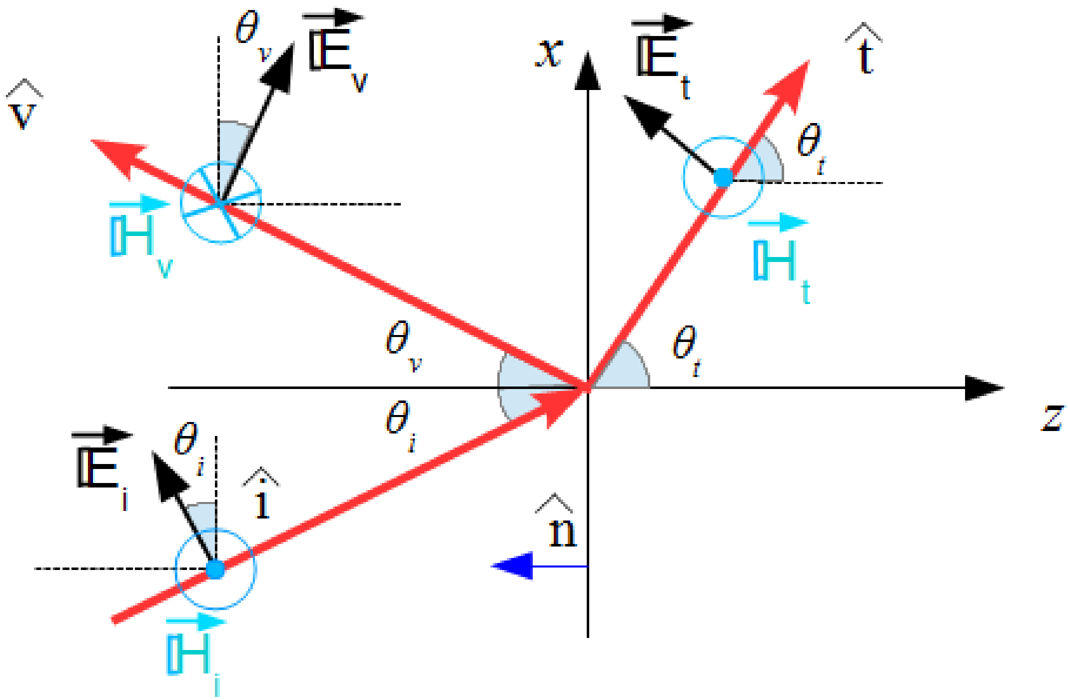
$$(E_{0i} - E_{0v})\eta_2 \cos\theta_i = E_{0t}\eta_1 \cos\theta_t$$

$$\boxed{\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 cos\theta_i - \eta_1 cos\theta_t}{\eta_2 cos\theta_i + \eta_1 cos\theta_t}} \qquad E_{0v} = E_{0i}\,\Gamma_{\perp}$$

$$\boxed{\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 cos\theta_i}{\eta_2 cos\theta_i + \eta_1 cos\theta_t}} \qquad E_{0t} = E_{0i}\,\tau_{\perp}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Caso II.
Inciencia perpendicular: el **campo magnético es perpendicular al plano de incidencia**.



$$\overrightarrow{\mathbb{H}}_i = H_{0i}\ \exp(-\gamma_1\,\hat{i}.\vec{r})\hat{y} \qquad \overrightarrow{\mathbb{H}}_v = -H_{0v}\ \exp(-\gamma_1\hat{v}.\vec{r})\ \hat{y}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

$$\vec{\mathbb{E}}_i = E_{0i}\,(\cos\theta_i\hat{x} - \cos\theta_i\hat{z})\exp(-\gamma_1(x\,\mathrm{sen}\theta_i + z\cos\theta_i))$$

$$\vec{\mathbb{H}}_i = \frac{E_{0i}}{\eta_1}\hat{y}\exp(-\gamma_1(x\,\mathrm{sen}\theta_i + z\cos\theta_i))$$

$$\vec{\mathbb{E}}_v = E_{0v}\,(\cos\theta_i\hat{x} + \mathrm{sen}\theta_i\hat{z})\exp(-\gamma_1(x\,\mathrm{sen}\theta_v - z\cos\theta_v))$$

$$\vec{\mathbb{H}}_v = -\frac{E_{0v}}{\eta_1}\hat{y}\exp(-\gamma_1(x\,\mathrm{sen}\theta_v - z\cos\theta_v))$$

$$\vec{\mathbb{E}}_t = E_{0t}\,(\cos\theta_t\hat{x} + \mathrm{sen}\theta_t\hat{z})\exp(-\gamma_2(x\,\mathrm{sen}\theta_t - z\cos\theta_t))$$

$$\vec{\mathbb{H}}_t = -\frac{E_{0t}}{\eta}\hat{y}\exp(-\gamma_2(x\,\mathrm{sen}\theta_t - z\cos\theta_t))$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Se aplican las condiciones de contorno en la superficie de separación de los dos medios:

Para el caso del campo eléctrico:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \Rightarrow \quad E_{ix} + E_{rx} = E_{tx} \quad \Rightarrow$$

$$E_{0i} \cos\theta_{\mathrm{i}} + E_{0v} \cos\theta_{v} = E_{0t} \cos\theta_{\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad (E_{0i} + E_{0v}) \cos\theta_{v} = E_{0t} \cos\theta_{\mathrm{t}}$$

Para el caso del campo magnético:

$$H_{t1} = H_{t2} \Rightarrow \mathrm{H}_{0i} + H_{vy} = H_{tx}$$

$$\frac{E_{0i}}{\eta_1} - \frac{E_{0v}}{\eta_1} = \frac{E_{0t}}{\eta_2}$$

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 cos\theta_t - \eta_1 cos\theta i}{\eta_2 cos\theta_t + \eta_1 cos\theta_i}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 cos\theta i}{\eta_2 cos\theta_t + \eta_1 cos\theta_i}$$

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{cos\theta_t}{cos\theta_i}$$

El subíndice ∥ indica que se trata de polarización transversal magnética TM. Se refiere a que ahora el campo eléctrico es **paralelo** al plano de incidencia.

Relaciones entre las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y transmitida.

Son valores adimensionales.

Son coherentes con los resultados obtenidos para la incidencia normal: si $\theta_i = 0$

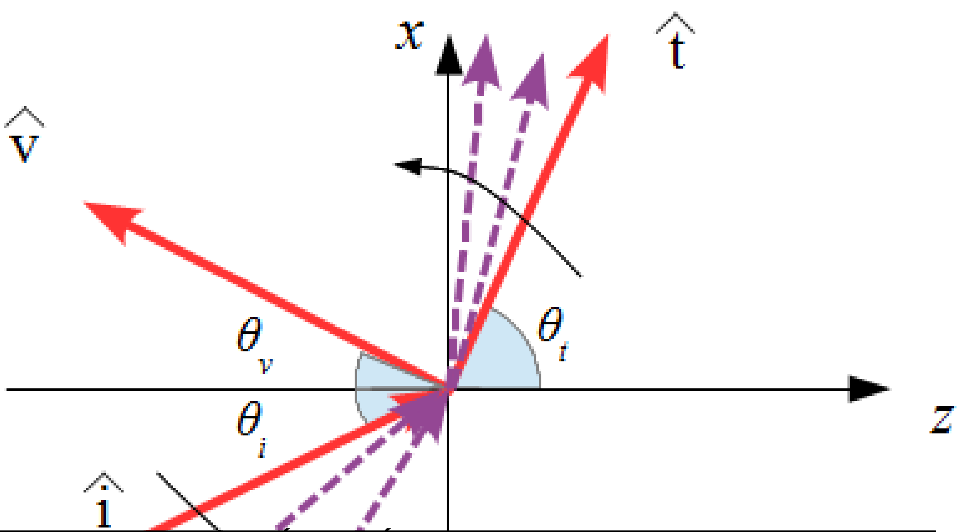
Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Ángulo crítico

A partir de la relación que liga los ángulos de incidencia y transmisión:

$$\frac{\mathrm{sen}\theta_t}{\mathrm{sen}\theta_i} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \Rightarrow \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1 \Rightarrow \ \mathrm{sen}\theta_t < \mathrm{sen}\theta_i \Rightarrow \theta_t < \theta_i$$

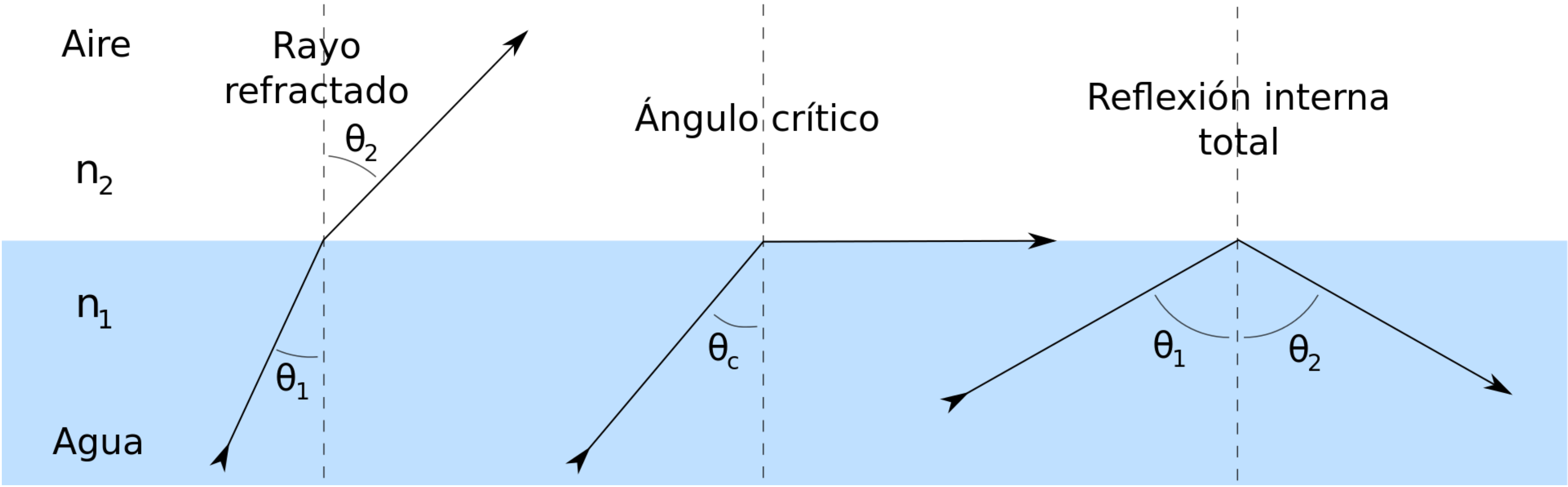
$Si\ \theta_t = \pi/2$ no hay onda transmitida.



$$\boxed{\theta_c = \mathrm{asen}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$$

Toda la potencia se transmite por la

Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)



Ondas planas. Cambio de medio (Incidencia oblicua)

Ángulo de Brewster: ángulo para el cuál se anula la componente paralela de la onda reflejada:

$$\Gamma_{\parallel} = 0 \;\Rightarrow \theta_B = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$$

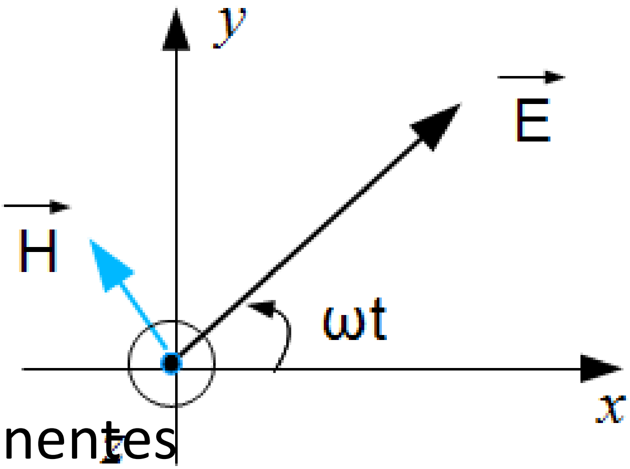
Aplicaciones en fotografía y óptica.

Ondas planas. Polarización

$$\vec{E} = Ex\hat{x} + Ey\,\hat{y}$$

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

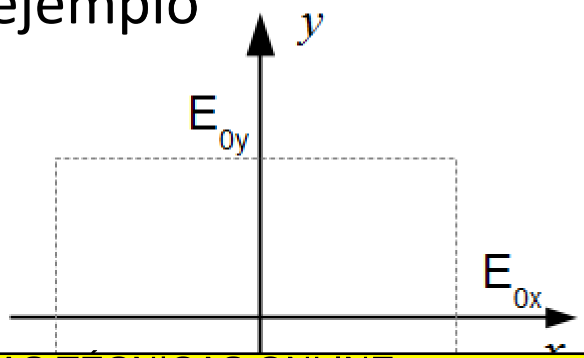
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$



Para estudiar los valores de las componentes
Del campo E fijamos un valor para z, por ejemplo
Z = 0 y hacemos: $\phi = \varphi_y - \varphi_x$

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t)$$

$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \phi)$$



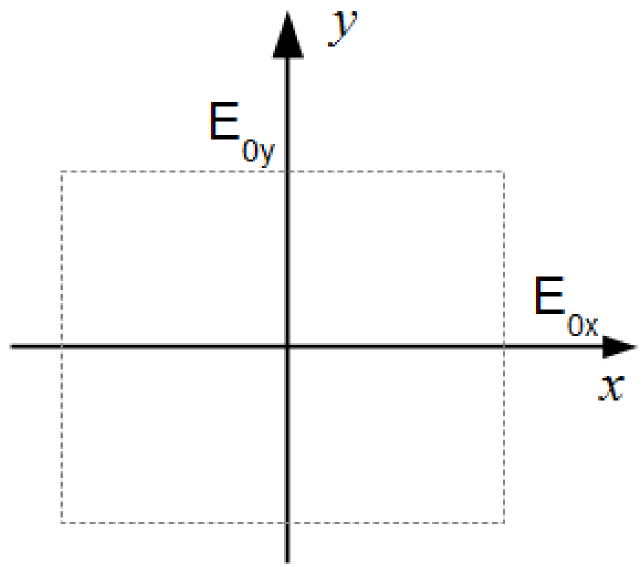
Ondas planas. Polarización

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

$$\delta = \varphi_y - \varphi_x$$

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t)$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \delta)$$

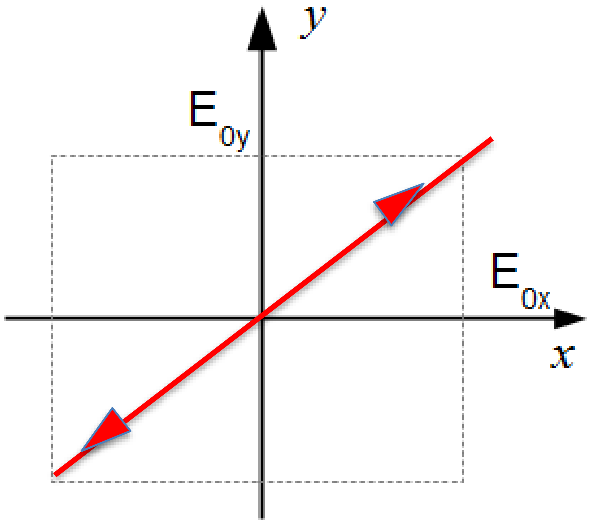
Se considera la variación del vector de campo eléctrico debido solo al avance del tiempo para un punto fijo (valor de z). Por ejemplo y para simplificar z = 0



El lugar geométrico del vector de campo eléctrico cae dentro de la zona marcada

Ondas planas. Polarización

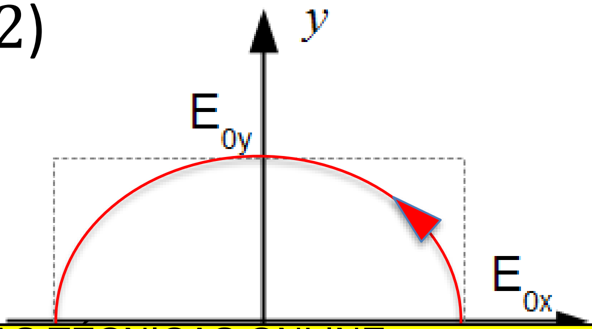
$$\text{Para } \delta = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t) \end{cases}$$



$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} \Rightarrow E_x = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} E_y$$

$$\text{Para } \delta = -\pi/2 \;\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\,\mathrm{sen}(\omega t) \end{cases} \Rightarrow$$



Ondas planas. Polarización

Caso general

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\delta + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1}$$

Ecuación elipse general