HOJA 1 DE PROBLEMAS

1. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $A, B, A_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{N}$. Demostrar:

   a) Si μ no es identicamente igual a infinito, entonces, $\mu(\emptyset) = 0$.

   b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$. Si, además, $\mu(A) < \infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

   c) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

   d) $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ si $A_k \uparrow A$.

   e) $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ si $A_k \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

   a) Demostrar que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es medible $\Longleftrightarrow \{x \in \Omega \ : \ f(x) > r\}$ es medible $\forall r$.

   b) Demostrar que si $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, son medibles también los son las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ y $\liminf_n f_n$.

   c) Demostrar que si $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, son medibles y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente, entonces f es medible.

3. Sea Ω un conjunto no numerable y sea $\mathcal{M} = \{E \subset \Omega \ : \ E \text{ ó } E^c \text{ es numerable o finito}\}$. Definimos $\mu(E) = 0$ si E es numerable o finito y $\mu(E) = 1$ si lo es E^c, para cada $E \in \mathcal{M}$. Probar que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y que $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida.

4. Probar que la desigualdad del Lema de Fatou puede ser estricta.
   Indicación: Considera $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $\mu(\Omega) < \infty$, $E \in \mathcal{M}$, con $0 < \mu(E) < \mu(\Omega)$ y definir $f_n = \chi_E$, si n es impar y $f_n = \chi_{E^c}$ si n es par.

5. Supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$ y sean $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ funciones medibles acotadas. Probar que si $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, se tiene

$$\int_\Omega f_n d\mu \longrightarrow \int_\Omega f d\mu$$

   Mostrar con un ejemplo que la hipótesis $\mu(\Omega) < \infty$ es esencial.

6. Probar que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es continua y $f(x) = 0$ a.e. con respecto a la medida de Lebesgue entonces $f(x) = 0 \ \forall x$.

7. Sea $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Usar el teorema de la convergencia monótona para demostrar

$$\int (\sum^{\infty} f_n) \, d\mu = \sum^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

9. Se dice que una función medible $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ está esencialmente acotada si $\exists C < \infty$ tal que $|f(x)| \leq C$ a.e.. Para esta función se puede definir es *supremo esencial* (para ser mas precisos, el supremo esencial de $|f|$) como

$$ess \sup |f| = \text{ínf}\,\{c \,:\, |f(x)| \leq c \text{ a.e.}\}$$

que también denotamos por $\|f\|_\infty$. Probar que si f, f_n, $n = 1, 2, ...$ están acotadas esencialmente, entonces

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0 \iff \exists E \subset \Omega \text{ de medida 0 tal que } f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente en } E^c.$$

10. Demostrar que si $f_n \longrightarrow f$ en medida

$$\Big(\text{es decir, } \forall \lambda > 0 \quad \mu\left(\{x \,:\, |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Big)$$

entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a f puntualmente, a.e.
Indicación: Elegir $n_1 < n_2 < ... < n_l < ...$ tal que si $E_l = \left\{x \,:\, |f_{n_l} - f| > \frac{1}{2^l}\right\}$ se tiene $\mu(E_l) < \frac{1}{2^l}$, y probar

$$\left\{x \,:\, \text{lím}\sup_{l\to\infty} |f_{n_l}(x) - f(x)| > 0\right\} \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=l}^{\infty} E_j$$

11. Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ medible y positiva. Probar que μ_f definida por $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$ es una medida (positiva) definida sobre la misma σ-álgebra, $\mathcal{M}$, dominio de μ.

12. Sea f una función integrable. Probar que

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \,:\, |f(x)| > t\}) dt,$$

donde la segunda integral se puede considerar en el sentido de Riemann. *Indicación: demostrarlo primero para funciones simples. Luego extenderlo a funciones integrables usando el siguiente Lema: dada una función medible f existe una sucesión de funciones simples, $0 \leq s_1(x) \leq \cdots \leq s_n(x) \leq \ldots$ que converge puntualmente a $|f(x)|$.*

13*. Sea $f \in L^1(d\mu)$. Probar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ se tiene $\int_E |f| d\mu < \epsilon$.
Con la notación del problema 11, esto nos dice que $\mu_{|f|}$ es <u>absolutamente continua</u> con respecto a μ. El recíproco también es cierto, y se conoce como

(**Teorema de Radon-Nikodym**). Sea ν una medida positiva y finita tal que para todo E medible con $\mu(E) = 0$ se tiene $\nu(E) = 0$. Entonces $\exists h \in L^1(\mu)$, $h \geq 0$ con $\nu = \mu_h$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.