Tema 1.2 Espacios vectoriales

ÁLGEBRA LINEAL

DMATIC, ETSI Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

1. Espacio vectorial

2. Dependencia e independencia lineal

3. Bases y coordenadas

4. Matriz del cambio de base

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto no vacío de elementos en el que se han definido dos operaciones llamadas suma y multiplicación:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \rightsquigarrow & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \rightsquigarrow & a\cdot b \end{array}$$

Se dice que $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es un **cuerpo** si verifica:

- Axiomas para la adición:
  - **S1** Ley **conmutativa:** $a+b=b+a$
  - **S2** Ley **asociativa:** $(a+b)+c=a+(b+c)$
  - **S3** **Existe elemento neutro:** $\exists\, 0\in\mathbb{K}$ tal que $a+0=a$
  - **S4** **Existen opuestos:** Para cada $a\in\mathbb{K}$, $\exists\, a'\in\mathbb{K}$ tal que $a+a'=0$.
    El opuesto de a es único y lo denotamos por $-a$
- Axiomas para la multiplicación:
  - **P1** Ley **conmutativa:** $a\cdot b=b\cdot a$
  - **P2** Ley **asociativa:** $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
  - **P5** Ley **distributiva respecto a la adición:** $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Ejemplo 1

- El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la suma y multiplicación usuales es un cuerpo.
- El conjunto $Q = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, cuyos elementos son las clases de equivalencia respecto a la relación de equivalencia $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n$, con las operaciones de suma $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}$ y multiplicación $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$ es un cuerpo.
- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo.
- Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ con las operaciones suma y multiplicación definidas en las siguientes tablas (aritmética modular con módulo 2):

$\mathbb{Z}_2$		
$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\mathbb{Z}_2$		
$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Se verifica que $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un cuerpo finito.

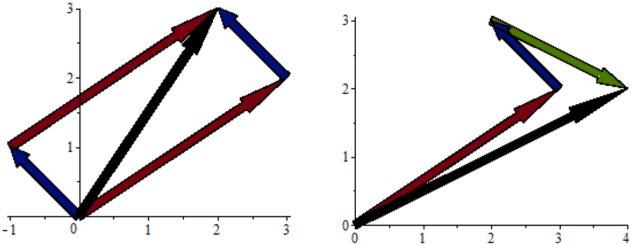
Sea V un conjunto no vacío de elementos (llamados vectores), en el que se han definido dos operaciones llamadas suma de vectores y multiplicación por elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcl} + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \rightsquigarrow & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (c, \vec{v}) & \rightsquigarrow & c\vec{u} \end{array}$$

Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$** si verifica:

- Axiomas para la adición:
  - **S1** Ley **conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
  - **S2** Ley **asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
  - **S3 Existe elemento neutro:** $\exists\, \vec{0} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
  - **S4 Existen opuestos:** Para cada $\vec{u} \in V$, $\exists\, \vec{u}' \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$
- Axiomas para la multiplicación por escalares:
  - **M1** Ley **asociativa:** $c \cdot (d \cdot \vec{u}) = (cd) \cdot \vec{u}$

En $\mathbb{R}^2$, se define la suma de dos vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ por $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$ y la multiplicación de un número real c y un vector $\vec{u}$ por $c\vec{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{pmatrix}$.



Ejemplo 2

Se denota por $P_2(\mathbb{R})$ al conjunto de los polinomios en la variable x de grado ≤ 2 con coeficientes reales.

Si $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2(\mathbb{R})$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P_2(\mathbb{R})$, entonces se define

$$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

y si $c \in \mathbb{R}$ se define

$$c \cdot p(x) = ca_2x^2 + ca_1x + ca_0$$

$P_2(\mathbb{R})$ con las operaciones de suma de polinomios y multiplicación por números reales es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Proposición 1

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *El elemento neutro de V es único.*
2. $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ *para todo* $\vec{u} \in V$.
3. $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$ *para todo* $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
4. *Si* $c \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \; c = 0$ *ó* $\vec{u} = \vec{0}$
5. *El opuesto de* $\vec{u}$ *es único y es de la forma* $(-1) \cdot \vec{u}$.

Demos. 1. Supongamos que $\vec{0}$ y $\vec{0}'$ son dos elementos neutros. Se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0} \text{ por ser } \vec{0}' \text{ elemento neutro} \\ \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}' \text{ por ser } \vec{0} \text{ elemento neutro} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{0} = \vec{0}'$$

2. Sea $\vec{u} \in V$ arbitrario. Se tiene

3. Sea $c \neq 0$ y $\vec{u} \in V$. Se tiene

$$\vec{u} = (cc^{-1}) \cdot \vec{u} = c \cdot (c^{-1} \cdot \vec{u}) = c \cdot (c^{-1} \cdot \vec{u} + \vec{0}) = \vec{u} + c \cdot \vec{0}$$

Entonces $c \cdot \vec{0}$ es elemento neutro y como es único se concluye que $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

4. Se sigue de las propiedades 2 y 3.

5. Supongamos que $\vec{u}$ tiene dos opuestos $\vec{u}'$ y $\vec{u}''$, entonces

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{u}') + \vec{u}'' &= \vec{0} + \vec{u}'' = \vec{u}'' \\ \vec{u}' + (\vec{u} + \vec{u}'') &= \vec{u}' + \vec{0} = \vec{u}' \end{aligned}$$

Por S1 y S2, se tiene $(\vec{u} + \vec{u}') + \vec{u}'' = \vec{u}' + (\vec{u} + \vec{u}'')$, y por lo tanto, $\vec{u}' = \vec{u}''$.
Además,

$$(-1) \cdot \vec{u} + \vec{u} = (-1) \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{u} = (-1 + 1) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Lo anterior implica que $(-1) \cdot \vec{u}$ es elemento opuesto de $\vec{u}$.

El conjunto de vectores $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es **linealmente dependiente (LD)** si

$$\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, \text{ no todos cero tales que } a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

El conjunto de vectores $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es **linealmente independiente (LI)** si

$$a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

Proposición 2

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ *LD* $\Leftrightarrow \vec{v} = c\vec{u}$ *para algún* $c \in \mathbb{K}$.
- *Todo sistema C que contenga al vector* $\vec{0}$ *es LD.*
- *Si C contiene un vector combinación lineal de otros dos vectores del sistema* $\Rightarrow$ *C es LD.*

Ejemplo 3

En $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es LD:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} a + c &= 0 \\ a + b &= 0 \\ a + 3b - 2c &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} a &= \lambda \\ b &= -\lambda \\ c &= -\lambda \end{aligned} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

En $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es LI:

Un vector $\vec{x}$ es **combinación lineal** de $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ si $\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + \cdots + c_n \vec{u}_n$$

Se dice que $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es un **sistema generador** de V si todo vector de V es combinación lineal del sistema C.

Se dice que $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es **base** de V si:

1. B es **LI**.
2. B es **SG** de V.

Bases canónicas: En $\mathbb{R}^2$, $B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En $\mathbb{R}^3$, $B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Coordenadas

Si $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base de V y $\vec{x}$ un vector de V, entonces existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + \cdots + c_n \vec{u}_n$$

y $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_B$ es el **vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B**.

Teorema 1

Las coordenadas de un vector $\vec{x} \in V$ respecto a una base $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ son únicas.

Demos. Supongamos que $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + \cdots + c_n \vec{u}_n$ y $\vec{x} = c_1' \vec{u}_1 + \cdots + c_n' \vec{u}_n$. Entonces $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (c_1 - c_1')\vec{u}_1 + \cdots + (c_n - c_n')\vec{u}_n$. Como $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ son LI se sigue que

$$c_1 - c_1' = 0, \ldots, c_n = c_n'$$

Teorema 2

Si V tiene una base $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ con n elementos, entonces todo conjunto con $n+1$ vectores de V es LD.

Demos. Sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1}\}$ $n+1$ vectores de V y supongamos que

$$a_1 \vec{v}_1 + \cdots + a_{n+1} \vec{v}_{n+1} = \vec{0}.$$

Los vectores $\vec{v}_j$ se expresan en combinación lineal de la base B:

$$\vec{v}_j = c_{1j} \vec{u}_1 + \cdots + c_{nj} \vec{u}_n, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Así, $a_1(c_{11}\vec{u}_1 + \cdots + c_{n1}\vec{u}_n) + \cdots + a_{n+1}(c_{1\,n+1}\vec{u}_1 + \cdots + c_{n\,n+1}\vec{u}_n) = \vec{0}$ y como B es base

$$\begin{aligned} a_1 c_{11} + \cdots + a_{n+1} c_{1\,n+1} &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \end{aligned}$$

no todos nulos. Por tanto, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1}\}$ es LD.

Teorema 3 (de la base)

En un EV generado por un número finito de vectores, todas las bases son finitas y poseen el mismo número de elementos.

La **dimensión** de V, $\dim(V)$, es el número de vectores de una base de V

Teorema 4 (de la base incompleta)

Si $\dim(V) = n$, *entonces a todo sistema de vectores* $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ *que sea LI, se le pueden añadir* $n - k$ *vectores hasta completar una base de* V.

Sean B_1 es una base de $\mathbb{R}^n$ y B_c es la base canónica:

$$B_1 = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_c = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

La **matriz del cambio de base B_1 a base canónica B_c** es:

$$\mathcal{C}(B_1, B_c) = \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix} := Q$$

La ecuación del cambio de coordenadas de base B_1 a B_c es:

Matriz del cambio de base B_c a base B_1

Sea Q la matriz del cambio de base B_1 a base B_c. Se tiene que Q es regular. **La matriz del cambio de base canónica a base B_1** es:

$$\mathcal{C}(B_c, B_1) = Q^{-1}$$

La ecuación del cambio de coordenadas de B_c a B_1 es:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{B_1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_c} .$$

Sean B_1 y B_2 dos bases de $\mathbb{R}^n$:

$$B_1 = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{w}_n = \begin{pmatrix} w_{1n} \\ \vdots \\ w_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $\mathcal{C}(B_1, B_c)$ la matriz del cambio de base B_1 a base canónica B_c y sea $\mathcal{C}(B_2, B_c)^{-1}$ la matriz del cambio de base B_c a base B_2.

La matriz del cambio de base B_1 a base B_2 es:

$$\mathcal{C}(B_1, B_2) = \mathcal{C}(B_2, B_c)^{-1}\mathcal{C}(B_1, B_c)$$

Con las asignaciones $P = \mathcal{C}(B_1, B_2)$, $Q = \mathcal{C}(B_1, B_c)$ y $R = \mathcal{C}(B_2, B_c)$. Se tiene que

$$P = R^{-1}Q$$

La ecuación del cambio de coordenadas de base B_1 a base B_2 es: