Circuitos DC: Electrostática

Nazario Félix González
n.felix@upm.es

Ángel García Pedrero
angelmario.garcia@upm.es

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

2021-2022

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

POLITÉCNICA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Content

Carga Eléctrica

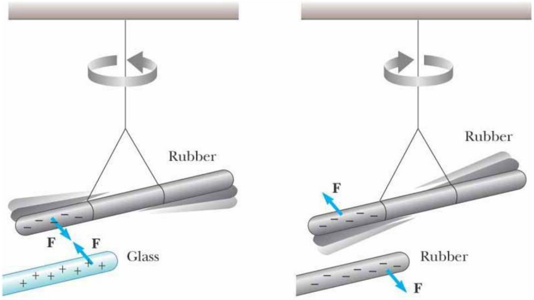
En la naturaleza, la materia se caracteriza por dos cantidades físicas: su masa y su carga eléctrica, que puede ser positiva (+) o negativa (-).

Cargas del mismo signo se repelen.

Cargas de diferentes signos se atraen.

Carga Eléctrica

Ejemplo: por fricción (acción mecánica) algunos materiales son propensos a cargarse con cargas positivas y negativas.



Principio de la conservación de la energía

La carga eléctrica total de un **sistema aislado**, es decir, la suma de la carga positiva y negativa nunca varía.

Un **sistema aislado** es aquel en el que la materia y la energía no pueden cruzar sus fronteras.

Cuantización de la Carga Eléctrica

Diferentes experimentos (por ejemplo: experimento de Millikan con gotas de aceite) confirman que la carga eléctrica solo existe en la naturaleza en cantidades que son múltiplos de la unidad fundamental de carga (carga del electrón), cuya magnitud es:

$$\bar{e} = 1.6021 \times 10^{-19}\mathrm{C} \qquad \text{Carga eléctrica fundamental}$$

Las cargas que observamos en la naturaleza son iguales o múltiplos de la carga fundamental *e*.

En el mundo macroscópico consideramos; sin embargo, distribuciones continuas de carga, siendo su carga fundamental *dq*.

Cuantización de la carga eléctrica

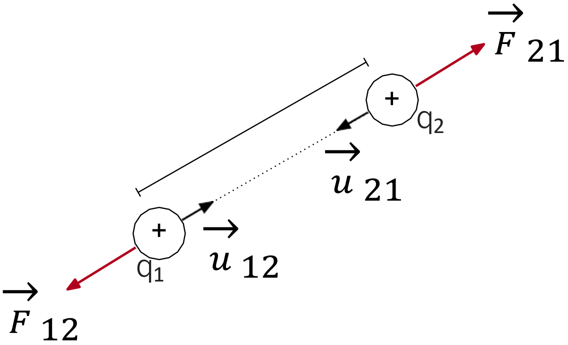
Partícula	Carga (C)	Masa (kg)
Electrón(e)	-1.6021×10^{-19}	9.1094×10^{-31}
Protón(p)	$+1.6021 \times 10^{-19}$	1.672×10^{-27}
Neutrón(n)	0	1.6749×10^{-27}

Punto de carga

Es un punto de materia desprovisto de masa y al que se asocia una carga eléctrica q positiva o negativa.

Ley de Coulomb

La interacción electrostática entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de sus cargas eléctricas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, estando dirigida según la línea que une las dos partículas.



Ley de Coulomb

$$F_1 = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} u_{21}$$

$$F_2 = K_e \frac{q_2 q_1}{r^2} u_{12}$$

donde $u_{21} = -u_{12}$ son vectores unitarios y $F_1 = -F_2$ son las fuerzas eléctricas en una carga debido a la otra.

La constante $K_e = 8,\ 9875 \times 10^9 \approx 9\times 10^9\ Nm^2/C^2$ en el sistema internacional de medidas; pero para operaciones analíticas se prefiere expresarlo como:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

donde $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$ es la permitividad eléctrica del vacío.

Ley de Coulomb

Finalmente, podemos expresar la ley de Coulomb como:

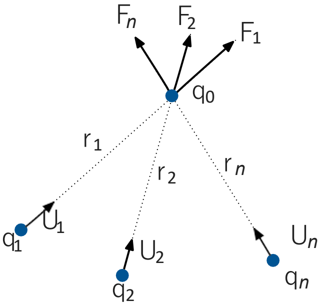
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}u$$

Unidad de medida para la fuerza: N (Newton).

Restricciones de la Ley de Coulomb:

- Puntos cargados
- Cargas Estacionarias
- Cargas en medio aéreo o vacio.

El principio de superposición:



Sea una distribución de cargas puntuales, la fuerza que ejercerán las otras cargas sobre q_0 será:

$$F_0 = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

El principio de superposición

donde $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{r_1^2}u_1, F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_2}{r_2^2}u_2, \ldots, F_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_n}{r_n^2}u_n$.
Substituyendo,

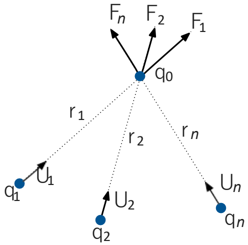
$$F_0 = \sum_{i=1}^{n} F_i = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}u_i$$

En una distribución de cargas, la fuerza que actúa sobre una carga puntual es el resultado de las fuerzas que actúan solas sobre esa carga puntual debido a cada una de las cargas.

Campo Eléctrico

El campo eléctrico en un punto en el espacio es la fuerza electrostática ejercida sobre una carga de prueba colocada en ese punto.

Considerando la distribución de cargas y dividiendo la fuerza resultante F_0 por la carga q_0, obtenemos la magnitud del vector que define el campo eléctrico:



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} u_i$$

Esta ecuación permite calcular el campo eléctrico creado por una distribución de n cargas puntuales.

Unidad de medida: $[E] = \frac{N}{C}$

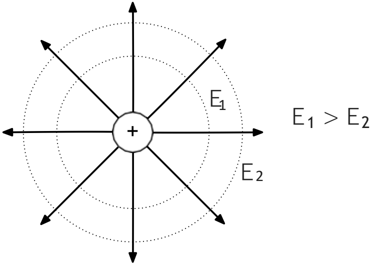
Campo Eléctrico

Este campo vectorial (campo eléctrico) dependerá de:

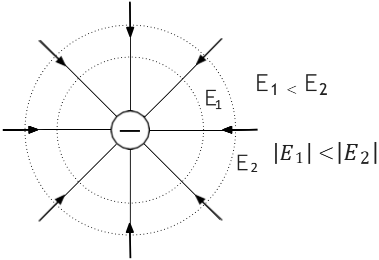
- La distribución de cargas del sistema $q_1, q_2, \ldots, q_n$
- La posición del punto $P(x, y, z)$ donde se coloca la carga de prueba (en nuestro caso, q_0 es nuestra carga de prueba). En otras palabras, el campo eléctrico es una función del punto P.

Líneas de campo eléctrico

Representan una visualización de la dirección en la que actúan las fuerzas del campo eléctrico E (x, y, z).



(a) Fuente (carga positiva)



(b) Sumidero (carga negativa)

Líneas de campo

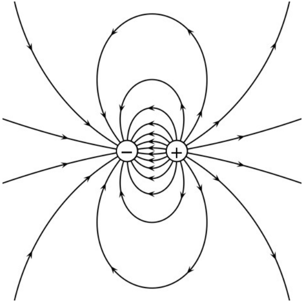


Figura 2: Dipolo

Simulador: EMSTATIC

Potencial Eléctrico

Una propiedad fundamental del campo eléctrico E (x, y, z) es que es *conservativo.*

Esto significa que el trabajo necesario para mover una unidad de carga positiva de un punto a otro **no depende** del camino que se siga sino únicamente del punto de partida y de llegada.

Es decir, el trabajo realizado por el campo eléctrico E (x, y, z) para mover una unidad de carga positiva de un punto en el espacio a otro es igual a la variación experimentada por una función escalar, llamada potencial, entre esos puntos.

Potencial Eléctrico

Se dice entonces que el campo eléctrico E tiene asociado un campo escalar V, denominado potencial eléctrico, cumpliendo en todo momento la siguiente relación:

$$E = -\nabla V = -\mathrm{grad}V$$

donde ∇ es el operador Nabla o de Hamilton y representa un vector simbólico.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

para un campo tridimensional E (x, y, z), sus componentes serán:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Potencial Eléctrico

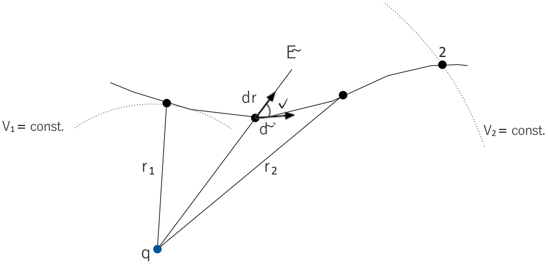
Para un campo eléctrico unidimensional, tendremos:

$$E = E(r) \implies E = -\frac{dV}{dr} u_r \implies dv = -E\,dr \text{ o } -dV = E\,dr$$

o

$$E = E(x) \implies E = -\frac{dV}{dr} u_x \implies dv = -E\,dx \text{ o } -dV = E\,dx$$

Potencial Eléctrico creado por una carga puntual



El trabajo realizado por $\vec{E}$ en un desplazamiento $d\vec{l}$ sera:

$$dW = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\,dl\cos\theta \Longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\,dr$$

donde $dl\cos\theta = dr$ y $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Potencial Eléctrico creado por una carga puntual

El trabajo realizado por el campo E del 1 al 2 será:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_2}^{r_1} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)
\end{aligned}
$$

Potencial Eléctrico creado por una carga puntual

Conclusiones del resultado obtenido:

- El trabajo realizado por el campo E es independiente del camino seguido y depende solo del punto de inicio y final.

- Cuando este es el caso, se dice que el campo E es conservador.

- El trabajo está determinado por la diferencia en el valor que toma una función escalar en el punto inicial y final.

- Esta función escalar (asociada con el campo E) se llama potencial y está representada por V.

Potencial Eléctrico creado por una carga puntual

Haciendo

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

tenemos que el trabajo E se puede expresar como :

$$W = \int_1^2 E\,dl = V_1 - V_2$$

donde $E \cdot dl = E\,dr$ y $V_1 - V_2 = \int_1^2 -dV$. En término de vectores $E = -\mathrm{grad}V$
or $E = -\nabla V$

Potencial Eléctrico creado por una carga puntual

El potencial eléctrico asociado con un punto es el trabajo que se debe realizar para llevar una unidad de carga positiva desde el infinito hasta ese punto.

Unidades de potencial eléctrico: se mide en voltios

$$1V = 1\frac{N \cdot m}{C} = 1\frac{J}{C}$$

Superficies equipotenciales

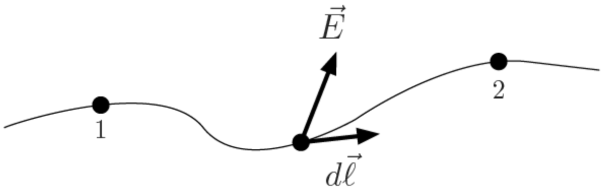
Son aquellos en los que el potencial eléctrico se mantiene constante, es decir, $V = \text{const}$

El trabajo del campo E en un desplazamiento elemental sobre esa superficie, sería:

$$E \cdot dl = -dV \qquad (1)$$

donde $dV = 0$ (superficie equipotencial). Por lo tanto $E \cdot dl = 0 \implies E \perp dl$.

Diferencia de potencial entre dos puntos



El trabajo que hará el campo E para mover una unidad de carga positiva del punto 1 al punto 2 será:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{V_1}^{V_2} -dV \implies V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Conductores en equilibrio electrostático

Se dice que un conductor cargado está en equilibrio electrostático cuando no hay desplazamiento de cargas dentro de él.

- El campo eléctrico dentro de un conductor en equilibrio electrostático es nulo. Es decir, E = 0.
- La carga de un conductor cargado y equilibrado electrostáticamente se distribuye en su superficie. En el interior E = 0 por lo tanto, $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \implies Q = 0.$
- El potencial eléctrico de un conductor en equilibrio electrostático es constante en todos los puntos y representará un volumen equipotencial. Si E = 0, implica que $\nabla V = 0 = \Rightarrow V = cte.$
- El campo eléctrico en las proximidades del conductor cargado es perpendicular a la superficie del conductor y su módulo es $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Capacitancia de un conductor (aislado)

Considere el caso de un conductor esférico de radio R y con una carga Q

$$V = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0 R}$$

Observamos que V variará en la misma proporción en que varía Q, es decir, la relación entre los dos es una constante que dependerá de la geometría del conductor.

Capacitancia de un conductor (aislado)

Se define como la capacitancia C de un conductor a la relación entre la carga eléctrica Q y su potencial eléctrico V.

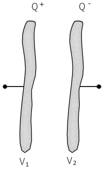
$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{para una esfera de radio } R \implies C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Unit of measurement:

$$1\,\text{Farad} = \frac{1\,\text{Coulomb}}{1\,\text{Volt}}$$

Definición de condensador

Un condensador es un sistema formado por dos conductores, llamados placas, con cargas iguales y opuestas, separados por cualquier medio dieléctrico.



La capacitancia está definida como:

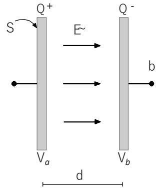
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$ Considerando siempre $\Delta V > 0$

Definición de condensador

Hay varios tipos de condensadores: planos, cilíndricos, etc. Pero solo nos centraremos en el condensador plano y de placas paralelas.

Condensador Plano

Generalmente, el campo eléctrico E solo existirá en el espacio entre las placas y puede considerarse constante y perpendicular a las placas si las dimensiones de las placas son muy grandes en relación a la distancia que las separan.



Por lo tanto

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{const.}$$

donde σ es la densidad de carga superficial, ε es la permitividad eléctrica del dieléctrico (medio entre las placas).

Condensador Plano

La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V_a - V_b = \int_{V_a}^{V_b} -dV = \int_0^d E dx \implies V_a - V_b = \frac{\sigma}{\varepsilon} d$$

Por lo tanto la capacitancia del condensador esta dada como:

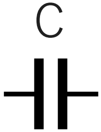
$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} \quad \text{pero } Q = \sigma S \text{ y } V_a - V_b = \frac{\sigma}{\varepsilon} d$$

Sustituyendo, tenemos que la capacitancia de un condensador planos esta dada por:

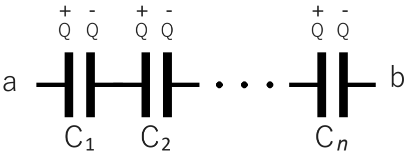
$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

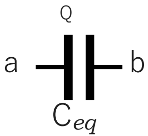
Condensador Plano

Símbolo eléctrico del condensador.



Condensadores conectados en serie





El voltaje entre las terminales a y b de condensadores conectados en serie es:

$$V_{ab} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right) = Q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

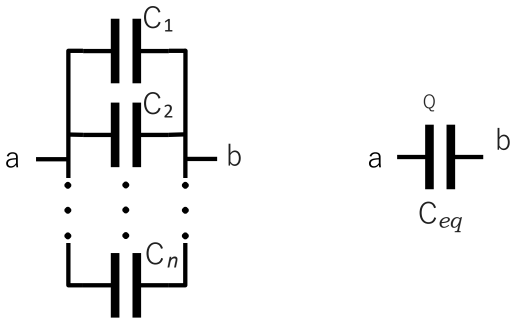
Condensadores conectados en serie

Y el voltaje equivalente V_{ab} es:

$$V_{ab} = \frac{Q}{C_{eq}} \Longrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

Condensadores conectados en paralelo



Para condensadores conectados en paralelo, la carga Q será :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n \qquad (2)$$

Condensadores conectados en paralelo

Donde $Q = C_{eq}V_{ab}$; $Q_i = C_iV_{ab}$. Luego:

$$C_{eq}V_{ab} = V_{ab}\sum_{i=1}^{n} C_i \Longrightarrow C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{3}$$

Energía almacenada en un condensador

Considerando un instante intermedio en el proceso de carga de un condensador, donde la carga en ese instante es q. El trabajo (energía) necesario para incrementar la carga en *dq* será:

$$dW (V_1 - V_2) dq \quad \text{sin embargo} \quad V_1 - V_2 = \frac{q}{C}$$

Sustituyendo,

$$dW = \frac{1}{C} q dq$$

Integrando todo el proceso de carga del condensador (almacenamiento de energía) se tiene:

$$U = \int_0^U dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq \implies U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

donde $V = V_1 - V_2 = \Delta V$