

Matemática Discreta I

Tema 1. Retículos y Álgebras de Boole

Jesús Martínez Mateo
jmartinez@fi.upm.es

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
E.T.S. Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Grado en Ingeniería Informática

Curso 2020/21

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Contenidos

1 Conjuntos

- Definiciones y notación

2 Relaciones

- Relaciones de equivalencia
- Relaciones de orden
 - Diagramas de Hasse
 - Elementos característicos
 - Ordenación topológica

3 Retículos

4 Álgebras de Boole

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Definiciones

- Un **conjunto** es una colección de objetos distintos, y lo notaremos por:
 - ▶ extensión: $A = \{a, b, c, \dots\}$,
 - ▶ comprensión: $A = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } P\}$.
- Llamamos **elementos** a los objetos que componen el conjunto, y notaremos:
 - ▶ $a \in A$ para indicar que el elemento a pertenece al conjunto A ,
 - ▶ $a \notin A$ para indicar que el elemento a no pertenece al conjunto A .
- El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos que posee, y lo notaremos por $\text{card}(A)$ o $|A|$.
- Llamamos **conjunto vacío** al conjunto sin elementos, y lo notamos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES Y GRUPOS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Sean A y B conjuntos.

Definición

Decimos que A es un **subconjunto** de B , o equivalentemente que A está *contenido* en B , y lo notaremos por $A \subseteq B$, si todos los elementos de A son también elementos de B . En caso contrario, decimos que A no es subconjunto de B , y no notamos por $A \not\subseteq B$.

Observación. Nótese que, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces se tiene que $A = B$, es decir, los conjuntos A y B contienen los mismos elementos.

Definición

Si S es un conjunto, definimos el **conjunto de las partes de S** como

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Ejemplo

El conjunto de las partes del conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto formado por los elementos:

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

La cardinalidad de ambos conjuntos es $|S| = 3$ y $|\mathcal{P}(S)| = 8$.

Observación. Nótese que, los elementos del conjunto $\mathcal{P}(S)$ son a su vez conjuntos, y tanto el conjunto vacío \emptyset como el propio conjunto S son elementos del conjunto de las partes de S , es decir, $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ y $S \in \mathcal{P}(S)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORIAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Sean A y B conjuntos, definimos:

Definiciones (Operaciones con conjuntos)

- La **unión** de A y B como el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

- La **intersección** de A y B como el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

- La **diferencia** de A y B como el conjunto

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2\}$
- $A \setminus B = \{1, 3\}$

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. El producto cartesiano de A y B es el conjunto formado por los elementos:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Propiedades. Sean A , B y C conjuntos. La unión e intersección de conjuntos verifica las siguientes propiedades:

- **Asociativa:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Conmutativa:**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- **Distributiva:**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Conjuntos

Propiedades. Sean A y B conjuntos tales que $A \subseteq B$. El conjunto diferencia $B \setminus A$ verifica las siguientes propiedades:

$$(B \setminus A) \cup A = B, \quad (B \setminus A) \cap A = \emptyset.$$

Dados los conjuntos A y B con $A \subseteq B$, podemos definir entonces:

Definición

- El conjunto **complementario** de A en B , y lo notaremos por A^c , como

$$A^c = B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}.$$

Observación. Nótese que,

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjuntos

Propiedades. Sean A , B y C conjuntos. El producto cartesiano de conjuntos verifica las siguientes propiedades:

- **Asociativa:**

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

- **Distributiva:**

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones

Definiciones

- Una **relación** R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.
- Si $R \subseteq A \times B$ y $(a, b) \in R$, decimos que “ a está relacionado con b mediante R ” y lo notamos por $a R b$. Si por el contrario el elemento a no está relacionado con b , es decir, $(a, b) \notin R$, lo notamos por $a \neg R b$.

Sean $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ conjuntos finitos no vacíos, y $R \subseteq A \times B$ una relación. Llamamos **matriz de la relación** a la matriz

$$M_R = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

donde

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Operaciones con relaciones

Sean R y S relaciones entre los conjuntos A y B , es decir, $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq A \times B$. Definimos:

Definiciones

- Relación **unión** $R \cup S$:

$$a (R \cup S) b \Leftrightarrow a R b \text{ o } a S b.$$

- Relación **intersección** $R \cap S$:

$$a (R \cap S) b \Leftrightarrow a R b \text{ y } a S b.$$

- Relación **complementaria** R^c :

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Operaciones con relaciones

Definición

- Relación **inversa** R^{-1} : (Nótese que $R^{-1} \subseteq B \times A$)

$$b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b.$$

Sean A , B y C conjuntos, R una relación entre los conjuntos A y B , es decir, $R \subseteq A \times B$, y S otra relación entre los conjuntos B y C , es decir, $S \subseteq B \times C$. Definimos:

Definición

- Relación **composición** $S \circ R$:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Operaciones con relaciones

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, y $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Y las relaciones:

- $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$.
- $S = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$.
- $T = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \beta)\}$.

Entonces:

- $R \cup S = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
- $R \cap S = \{(1, b), (2, b)\}$.
- $R^c = \{(2, a), (3, a)\}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Una **aplicación** f de A en B , que notaremos por $f: A \rightarrow B$, es una relación binaria entre los conjuntos A y B en la que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B , es decir

$$\forall a \in A, \exists! b \in B \mid a f b.$$

Para decir que dos elementos a y b están relacionados a través de una aplicación f utilizaremos las notaciones $(a, b) \in f$, $a f b$, o $f(a) = b$.

Definición

- El **dominio** de f es: $A = \{a \in A \mid \exists b \in B, f(a) = b\}$.
- La **imagen** de f es: $f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\} \subset B$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones

Sean A y B dos conjuntos, y $f: A \rightarrow B$ una aplicación.

Definición

- f es **inyectiva** si y sólo si $\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
- f es **sobreyectiva** si y sólo si $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$
- f es **biyectiva** si y sólo si $\forall b \in B, \exists! a \in A$ tal que $f(a) = b$

Sean A, B, X, Y conjuntos, con $A, B \subseteq X$, y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación.

Propiedades. Las imagen de f verifica las siguientes propiedades:

- $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones

Sean A, B, X, Y conjuntos, con $A, B \subseteq Y$, y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación.

Propiedades. Las imagen recíproca de f verifica las siguientes propiedades:

- $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Teorema

Sean A, B, X, Y conjuntos, con $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación.

- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ y se tiene que $A = f^{-1}(f(A))$ si y sólo si f es inyectiva.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones

Sean A, B, C, D conjuntos, con $B \subseteq C$, y $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow D$ aplicaciones.

Definición

- La aplicación **composición** de f y g es la aplicación $(g \circ f): A \rightarrow D$ tal que $\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- La aplicación **identidad** en un conjunto A es la aplicación $i_A: A \rightarrow A$ tal que $\forall a \in A, i_A(a) = a$.
- La aplicación **inversa** de una aplicación $f: A \rightarrow B$ es la aplicación $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$.

Teorema

Sean A, B, C conjuntos.

CLASES PARTICULARES / TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Relaciones en un conjunto

Definición

Sea A un conjunto. Decimos que R es una **relación en el conjunto** A si se tiene que $R \subseteq A \times A$.

Propiedades. Sea R una relación en un conjunto A . Se verifica entonces que:

- R es **reflexiva** si $\forall a \in A$ se tiene que $a R a$.
- R es **simétrica** si $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a R b$ entonces $b R a$.
- R es **asimétrica** si $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a R b$ entonces $b \not R a$.
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a R b$ y $b R a$ entonces $a = b$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones en un conjunto

Sea R una relación en un conjunto. Observando la matriz M de la relación R vemos que

- R es **reflexiva** si la diagonal principal de la matriz M son todos unos, es decir

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- R es **simétrica** si la matriz M coincide con su transpuesta M^t , ejemplo

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad M^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

• **ES TRANSITIVA** si el producto booleano $M \cdot M \leq M$

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A$ se tiene que $a R a$.
- Simétrica: $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a R b$ entonces $b R a$.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$ se tiene que, si $a R b$, $b R c$ entonces $a R c$.

Ejemplo

En el conjunto \mathbb{Z} la relación R dada por $a R b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ es una relación de equivalencia puesto que verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^2 = a^2 \Rightarrow a R a$.
- Simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b R a$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia en A .

Definición

Definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$, y la notamos por $[a]$, como el conjunto de todos los elementos de A relacionados con a a través de R , es decir,

$$[a] = \{x \in A \mid x R a\}.$$

Propiedades. Las clases de equivalencia verifican las siguientes propiedades:

- $\forall a \in A$ se tiene que $[a] \neq \emptyset$.
- $\forall a, b \in A$ con $a \neq b$, $[a] = [b]$ si y sólo si $a R b$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones de equivalencia

Definición

Una **partición** o **conjunto cociente** de un conjunto A , no vacío, es una colección de subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , no vacíos, tales que

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.
- $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$.

Llamamos **bloques de la partición** a los subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_k .

Observación. Nótese que, una relación de equivalencia en un conjunto produce una partición del conjunto y, recíprocamente, una partición de un conjunto determina una relación de equivalencia en el conjunto.

Notaremos por A/R al conjunto cociente de una relación R definida en un conjunto A , es decir

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones de orden

Definiciones

- Una relación R en un conjunto A es una **relación de orden** si verifica las propiedades:
 - ▶ Reflexiva: $\forall a \in A$ se tiene que $a R a$.
 - ▶ Antisimétrica: $\forall a, b \in A$ se tiene que, si $a R b$, $b R a$ entonces $a = b$.
 - ▶ Transitiva: $\forall a, b, c \in A$ se tiene que, si $a R b$, $b R c$ entonces $a R c$.
- Llamamos **conjunto ordenado** al par (A, R) formado por un conjunto A y una relación R definida en A .
- Sea (A, R) un conjunto ordenado. Decimos que dos elementos $a, b \in A$ son comparables si se tiene que $a R b$ ó $b R a$.
- Decimos que el par (A, R) es un conjunto **totalmente ordenado** si es un conjunto ordenado y todo par de elementos de A son comparables.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORIAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones de orden

Ejemplos

- (\mathbb{N}, \leq) , donde \leq indica la relación menor o igual, es un conjunto totalmente ordenado. Definimos la relación \leq como

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid b = a + n.$$

- $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ indica la relación de divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado. Definimos la relación $|$ como

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid b = an.$$

Nótese que, $a \mid b$ significa que “ a divide a b ”.

- $(D_n, |)$, donde D_n es el conjunto de los divisores positivos de n , es

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones de orden

Orden lexicográfico y orden producto

Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados. En el conjunto producto $A \times B$ definimos dos relaciones de orden:

Definiciones

- Orden lexicográfico.

$$(a, b) R_{Lex} (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq c, a R c \\ a = c, b S d \end{cases}$$

- Orden producto.

$$(a, b) R_{Prod} (c, d) \Leftrightarrow a R c, b S d$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relaciones de orden

Orden lexicográfico y orden producto

Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, y las relaciones de orden $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$, $S = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, de forma que (A, R) y (B, S) son conjuntos ordenados. Tenemos que:

$$R_{Lex} = \{(1a, 1a), (1a, 1b), (1a, 2a), (1a, 2b), (1a, 3a), (1a, 3b), \\ (1b, 1b), (1b, 2a), (1b, 2b), (1b, 3a), (1b, 3b), \\ (2a, 2a), (2a, 2b), (2b, 2b), (3a, 3a), (3a, 3b), (3b, 3b)\}$$

$$R_{Prod} = \{(1a, 1a), (1a, 1b), (1a, 2a), (1a, 2b), (1a, 3a), (1a, 3b), \\ (1b, 1b), (1b, 2a), (1b, 2b), (1b, 3a), (1b, 3b)\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

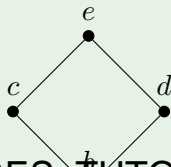
Diagrama de Hasse

El diagrama de Hasse de un conjunto ordenado (A, R) con A finito es una representación gráfica de la relación R , donde cada elemento se representa por un punto en el plano. Si dos elementos $a, b \in A$ están relacionados a través de R , es decir $a R b$, entonces se dibuja a por debajo de b y se unen ambos elementos por un segmento. El diagrama no incluye los segmentos correspondientes a la propiedad transitiva, es decir, si $a R b$ y $b R c$ se suprime el segmento correspondiente a $a R c$.

Ejemplo

Dibujamos el diagrama de Hasse de la relación R dada por:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e),$$



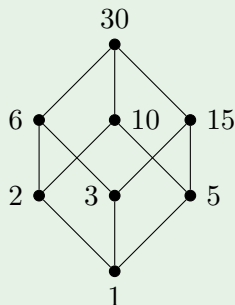
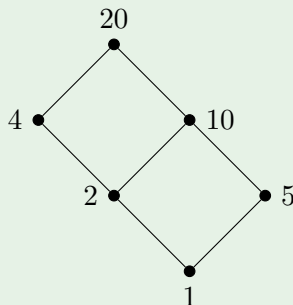
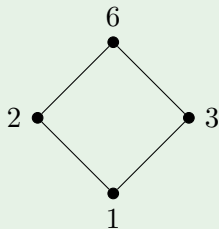
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Diagrama de Hasse

Ejemplos

Dibujamos los diagramas de Hasse de los conjuntos ordenados $(D_6, |)$, $(D_{20}, |)$ y $(D_{30}, |)$.



$(D_6, |)$

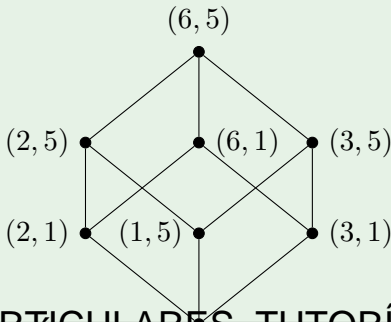
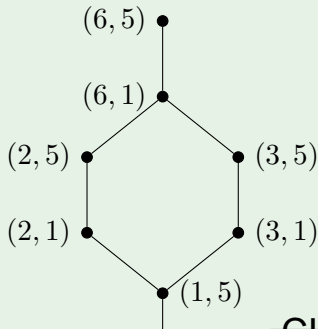
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Diagramas de Hasse

Ejemplos

Sean $(D_6, |)$, $(D_5, |)$ conjuntos ordenados. $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_5 = \{1, 5\}$, $D_6 \times D_5 = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (6, 1), (6, 5)\}$, y el diagrama de Hasse de los órdenes lexicográfico y producto es:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Elementos característicos en conjuntos ordenados

Sea (A, R) un conjunto ordenado y S un subconjunto no vacío de A .

Definiciones

- $m \in A$ es **maximal** de A si $\nexists x \in A$ con $x \neq m$ tal que $m R x$.
- $m \in A$ es **minimal** de A si $\nexists x \in A$ con $x \neq m$ tal que $x R m$.
- $m \in A$ es **máximo** de A si $\forall x \in A$ se tiene que $x R m$.
- $m \in A$ es **mínimo** de A si $\forall x \in A$ se tiene que $m R x$.
- $c \in A$ es **cota superior** de S si $\forall x \in S$ se tiene que $x R c$.
- $c \in A$ es **cota inferior** de S si $\forall x \in S$ se tiene que $c R x$.
- $s \in A$ es **supremo** de S si s es cota superior de S y $\forall c \in A$ tal que c es cota superior de S , se tiene que $s R c$.

Cartagena99

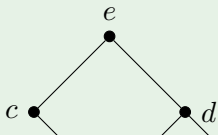
CLASES PARTICULARES TUTORIAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Existencia y unicidad de elementos característicos

Sean (A, R) un conjunto ordenado, y S un subconjunto finito, no vacío, del conjunto A . Se tiene que:

- S tiene al menos un elemento maximal y otro minimal.
- S tiene a lo sumo un elemento máximo y otro mínimo, es decir, tanto el máximo como el mínimo de S , si existen, son únicos.
- S tiene a lo sumo un elemento supremo y otro ínfimo, es decir, tanto el supremo como el ínfimo de S , si existen, son únicos.

Ejemplo



- Maximales: $\{e\}$. Minimales: $\{c, d\}$.
- Máximo: e . Mínimo: \nexists .

Considerando ahora el subconjunto $S = \{c, d\}$

CLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC

CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Ordenación topológica

Teorema

Sea (A, \leq) un conjunto finito ordenado. Existe un orden total $(A, <)$ que lo contiene, es decir, tal que si $a \leq b$ entonces $a < b$.

Demostración.

Sea a_1 un elemento minimal de (A, \leq) , y a_2 un elemento minimal de $(A \setminus \{a_1\}, \leq)$, construimos entonces el orden total $(\{a_1, a_2\}, <)$ donde los elementos se ordenan de la forma $a_1 < a_2$. Sea a_3 un elemento minimal de $(A \setminus \{a_1, a_2\}, \leq)$, ampliamos el orden total anterior y los elementos ordenados de la forma $a_1 < a_2 < a_3$. Como el conjunto A es finito, en un número finito de pasos se obtiene un orden total para los elementos de A :

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Retículos

Primera definición de retículo

Definición

Un conjunto ordenado (A, R) es un **retículo** si todo par de elementos en A tienen supremo e ínfimo, es decir,

$$\forall a, b \in A, \exists \sup\{a, b\}, \inf\{a, b\} \in A$$

Propiedades. Sea (A, R) un retículo. $\forall a, b, c \in A$ se verifica que:

- $\inf\{a, b\} R a, b R \sup\{a, b\}$.
- Si $a R c, b R c$ entonces $\sup\{a, b\} R c$
- Si $a R b, c R d$ entonces $\left\{ \begin{array}{l} \sup\{a, c\} R \sup\{b, d\} \\ \inf\{a, c\} R \inf\{b, d\} \end{array} \right.$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Retículos

Ejemplos

- (\mathbb{N}, \leq) es retículo, y se tiene que

$$\sup_{\leq} \{a, b\} = \text{máx}\{a, b\} \quad \inf_{\leq} \{a, b\} = \text{mín}\{a, b\}.$$

- $(\mathbb{N}, |)$ y $(D_n, |)$ son retículos, y se tiene que

$$\sup_{|} \{a, b\} = \text{mcm}\{a, b\} \quad \inf_{|} \{a, b\} = \text{mcd}\{a, b\}.$$

- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es retículo, y se tiene que

$$\sup_{\subseteq} \{A, B\} = A \cup B \quad \inf_{\subseteq} \{A, B\} = A \cap B.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Retículos

Segunda definición de retículo

Definición

Un **retículo** es una terna (A, \vee, \wedge) donde A es un conjunto y \vee, \wedge son dos operaciones binarias definidas en A , es decir $\vee, \wedge: A \times A \rightarrow A$, tal que verifican las siguientes propiedades:

- Idempotente: $\forall a \in A, \quad a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$
- Conmutativa: $\forall a, b \in A, \quad a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$
- Asociativa:

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Equivalencia entre las definiciones de retículo

Teorema

Las dos definiciones de retículo son equivalentes, y la relación entre las operaciones y el orden es

$$a R b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a,$$

o equivalentemente $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Demostración.

Sea el conjunto ordenado (A, R) un retículo, construimos las operaciones $\vee, \wedge: A \times A \rightarrow A$ como $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Es inmediato comprobar que las operaciones \vee, \wedge verifican las propiedades idempotente, conmutativa, asociativa, etc.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Equivalencia entre las definiciones de retículo

Demostración (continuación).

Recíprocamente, sea (A, \vee, \wedge) un retículo. La relación dada por $a R b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ es una relación de orden puesto que verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A, a \vee a = a, a \wedge a = a \Rightarrow a R a.$
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A,$

$$\left. \begin{array}{l} a R b \Rightarrow a \vee b = b, a \wedge b = a \\ b R a \Rightarrow b \vee a = a, b \wedge a = b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \vee b = b \Rightarrow b \vee a = b \Rightarrow a = b \\ a \wedge b = a \Rightarrow b \wedge a = a \Rightarrow b = a \end{array} \right\}$$

- Transitiva: $\forall a, b, c \in A, \left. \begin{array}{l} a R b \Rightarrow a \vee b = b, a \wedge b = a \\ b R c \Rightarrow b \vee c = c, b \wedge c = b \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$b \vee c = c \Rightarrow (a \vee b) \vee c = c$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de los retículos

Definición

Un retículo es **acotado** si posee elemento máximo y mínimo. Notaremos por 1 al elemento máximo y por 0 al elemento mínimo.

Definiciones

- Sea (A, \vee, \wedge) un retículo acotado. $\forall a \in A$ decimos que $a' \in A$ es el **elemento complementario** de a si $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$.
- Un retículo es **complementario** si es acotado y todos sus elementos poseen complementario.

Definición

Un retículo (A, \vee, \wedge) es **distributivo** si $\forall a, b, c \in A$ se verifica que:

CLAMAS Y ANTRICULAN HISTORIAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Propiedades de los retículos

Teorema

Todo retículo finito es acotado.

Demostración.

Sea (A, \vee, \wedge) un retículo con $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ finito. Veamos primero que existe $b \in A$ tal que $a R b$, es decir, $a \vee b = b, a \wedge b = a \quad \forall a \in A$. Elegimos $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$. Por la propiedad de absorción tenemos que

$$(a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge a_i = a_i \vee ((a_1 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_n) \wedge a_i) = a_i,$$

mientras que $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \vee a_i = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$, para todo a_i con $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto b es máximo en (A, \vee, \wedge) , es decir $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$. Análogamente, vemos que $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Propiedades de los retículos

Ejemplos (Retículos complementarios)

- $(\mathbb{N}, |)$ no es un retículo acotado y por lo tanto tampoco es complementario.
- $(D_n, |)$ es un retículo complementario si y sólo si n es producto de números primos distintos.
- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo complementario.

Teorema

En un retículo acotado y distributivo, el complementario de un elemento, si existe, es único.

Corolario

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

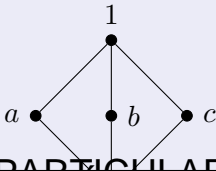
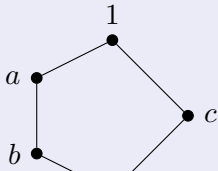
Propiedades de los retículos

Ejemplos (Retículos distributivos)

- $(D_n, |)$ es un retículo distributivo $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo distributivo.

Teorema

Un retículo es no distributivo si y sólo si tiene un subretículo isomorfo a cualquiera de los siguientes retículos:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Álgebras de Boole

Definición

Un **álgebra de Boole** es un retículo acotado complementario y distributivo.

Un álgebra de Boole es, por lo tanto, una terna (A, \vee, \wedge) compuesta por un conjunto A y dos operaciones $\vee, \wedge: A \times A \rightarrow A$ (suma y producto) que $\forall x, y, z \in A$ verifican las siguientes propiedades:

- Idempotente: $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x.$
- Conmutativa: $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$
- Asociativa: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$
- Absorción: $x \vee (y \wedge x) = x, \quad x \wedge (y \vee x) = x.$

- Existen elementos neutros $\begin{cases} \text{para la suma: } 0 & x \vee 0 = x \\ \text{para el producto: } 1 & x \wedge 1 = x \end{cases}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Álgebras de Boole

Ejemplos

- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un álgebra de Boole.
- El conjunto de Boole $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ con las operaciones suma y producto dadas en la siguiente tabla es un álgebra de Boole.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- Sea $\mathcal{B}^n = \{0, 1\}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathcal{B}\}$ y las operaciones:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n)$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Álgebras de Boole

Teorema

Sea (A, \vee, \wedge) un álgebra de Boole. Se verifican las siguientes propiedades:

- Absorción del neutro: $1 \vee x = 1, \quad 0 \wedge x = 0.$
- Involutiva: $(x')' = x.$
- Leyes de Morgan: $(x \vee y)' = x' \wedge y', \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'.$

Demostración.

- $1 \vee x = (x \vee x') \vee x = (x \vee x) \vee x' = x \vee x' = 1.$
 $0 \wedge x = (x \wedge x') \wedge x = (x \wedge x) \wedge x' = x \wedge x' = 0.$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

VARIABLES Y FUNCIONES BOOLEANAS

Definición

- Una **variable booleana** es una variable que representa dos posibles valores, e.g. $x \in \{0, 1\}$.
- Una **función booleana** de n variables es una aplicación $f: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ tal que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}^n.$$

- Sea $f: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ una función booleana. Llamamos **conjunto de verdad** de la función f al conjunto

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Tablas de verdad

Definición

Una **tabla de verdad** es una tabla que contiene todos los posibles valores que pueden tomar un conjunto de variables booleanas.

Podemos representar una función booleana mediante una tabla de verdad de la forma

x_1	x_2	\dots	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	\dots	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	\dots	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
0	1	\dots	1	$f(0, 1, \dots, 1)$
1	0	\dots	0	$f(1, 0, \dots, 0)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Tablas de verdad

Ejemplo

La tabla de verdad de la función dada por el conjunto de verdad $S(f) = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresiones booleanas

Definición

Definimos una **expresión booleana** (o expresión de Boole) en n variables x_1, x_2, \dots, x_n de forma recursiva:

- x_1, x_2, \dots, x_n son expresiones de Boole.
- los símbolos 0 y 1 son expresiones de Boole.
- Si $E_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son expresiones de Boole, entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y E_1' son expresiones de Boole.
- No existen más expresiones de Boole.

Propiedad. Sea $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una expresión booleana en n variables. Existe una función booleana $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ en m variables con $m \geq n$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORIAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresiones booleanas

Ejemplo

La expresión booleana $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2' \wedge x_3)$ representa a la función booleana $f(x_1, x_2, x_3)$ con la siguiente tabla de verdad

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	x_2'	$x_2' \wedge x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresiones booleanas

Definiciones

- Llamamos **producto elemental** asociado a (x_1, x_2, \dots, x_n) a la expresión

$$E_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = E_{x_1} \wedge E_{x_2} \wedge \dots \wedge E_{x_n},$$

$$\text{donde } E_{x_i} = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i = 1 \\ x'_i & \text{si } x_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Decimos que una expresión E está en forma de **suma de productos elementales** cuando $E = E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_k$ donde E_1, E_2, \dots, E_k son productos elementales.

Propiedad. Sea $f: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ una función booleana. Existe una expresión booleana $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en n variables que representa a

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S(f)} E_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

$$E(x) = \bigvee_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S(f)} E_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Expresiones booleanas

Ejemplos

- ① Sea $f: \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}$ una función booleana con conjunto de verdad $S(f) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$. Una expresión booleana que representa a f es

$$E(f) = E_{(0,0)} \vee E_{(0,1)} \vee E_{(1,0)} = (x'_1 \wedge x'_2) \vee (x'_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_2)$$

- ② Sea $f: \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ una función booleana con conjunto de verdad $S(f) = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. Una expresión booleana que representa a f es

$$E(f) = E_{(0,1,1)} \vee E_{(1,0,1)} \vee E_{(1,1,1)} =$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Simplificación de expresiones booleanas

Definición

Decimos que dos expresiones booleanas son **equivalentes** si y sólo si representan la misma función booleana, y por lo tanto coinciden sus tablas de verdad.

Teorema

Sean $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una expresión booleana en n variables, y z una variable booleana. Las expresiones $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = (E(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge z) \vee (E(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge z')$$

son expresiones equivalentes.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Mapas de Karnaugh

- Un mapa de Karnaugh es una representación gráfica de una tabla de verdad, y por lo tanto, de una función booleana.
- Para una función booleana de n variables el mapa consta de 2^n cuadrados, y cada cuadro representa un producto elemental, es decir, un elemento $x \in \mathcal{B}^n$.
- Los productos elementales son adyacentes en el mapa si y sólo si difieren tan sólo en una variable.

Ejemplos

	y	y'
x	11	10

	y	y	y'	y'
x	110	111	101	100

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	0	0	1	0	t'
x	0	0	1	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	1	1	0	0	t'
x	1	1	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Mapas de Karnaugh

Simplificación

A efectos de adyacencia, los lados opuestos del mapa son adyacentes.

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	0	0	0	0	t'
x	1	0	0	1	t
x'	1	0	0	1	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1	0	0	1	t'
x	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	1	0	0	1	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	1	1	0	0	t'
x	1	1	0	0	t
x'	1	1	0	0	t
x'	1	1	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	0	0	1	1	t'
x	0	0	1	1	t
x'	1	0	1	1	t
x'	0	0	1	0	t'
	z'	z	z	z'	

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quine-McCluskey

Simplificación

Obtenemos una expresión booleana en forma de “mínima suma de productos” para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

Paso 1.

0000

0100

1000

1100

1110

0111

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quine-McCluskey

Simplificación

Obtenemos una expresión booleana en forma de “mínima suma de productos” para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

Paso 2.

* 0000	0-00
* 0100	-000
* 1000	-100
* 1100	1-00
* 1110	11-0
* 0111	111-

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Quine-McCluskey

Simplificación

Obtenemos una expresión booleana en forma de “mínima suma de productos” para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

Paso 3.

* 0000		* 0-00	
<hr/>		<hr/>	
* 0100		* -000	
<hr/>		<hr/>	
* 1000		* -100	
<hr/>		<hr/>	
* 1100	\Rightarrow	* 1-00	\Rightarrow --00
<hr/>		<hr/>	
* 1110	\Rightarrow	11-0	\Rightarrow 1-00
<hr/>		<hr/>	
* 0111		111-	

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quine-McCluskey

Simplificación

Paso 4.

	1100	1110	0100	1111	0111	1011	1000	0000
11-0	X	X						
111-		X		X				
-111				X	X			
1-11				X		X		
--00	X		X				X	X

$$f(x, y, z, t) = z't' + yzt + xzt + xyt'$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70