Problemas de valor inicial

Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Septiembre 2021

Objetivos

- Qué es un problema de valor inicial
- Discretización, mallados
- Diferenciación numérica.

Algunos métodos numéricos

- Euler: forward, backward
- Leap-frog y euler modificado
- Método de Taylor
- Trapecio

$$\begin{cases} Y'(t) = \overset{\text{'' } A}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} Y(t) + \underline{\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 \operatorname{sen}(t) + b_1 \cos t \\ a_2 \operatorname{sen}(t) + b_2 \cos t \end{pmatrix}$$

$$2a_1 - a_2 - b_1 = 2 \qquad a_1 + 2b_1 - b_2 = 0$$

$$-a_1 + 2a_2 - b_2 = -2 \qquad -b_1 + a_2 + 2b_2 = 2$$

$Y_h(t)$, autovalores de $A = -1, -3$
autovectores de A

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1 = 1 & a_2 = 0 \\ b_2 = 1 & b_1 = 0 \end{matrix}$$

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = Y_h(0) + Y_p(0) \Rightarrow Y_h(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = 2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

PVI: Problema de Valor Inicial

El marco teórico de los métodos numéricos se va a plantear sobre la siguiente EDO de orden 1 en *forma estándar*

Definition

El Problema de Valor Inicial (o Problema de Cauchy) para $Y(t) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & \text{para todo } t \in [t_0, T] \\ Y(t_0) = Y_0, & \textit{dato inicial } Y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{PVI}$$

donde $f : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua en $D := (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable.

No todas las EDOs de orden 1 se pueden escribir en forma estándar:

$$F(t, Y(t), Y'(t)) = 0$$

Notaciones

El tiempo t siempre se considera en un intervalo $[t_0, T] \subseteq [0, \infty)$.
Recordamos las notaciones vectoriales

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y también} \qquad f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, Y(t)) \end{pmatrix}$$

donde las componentes son dadas por las funciones

$$Y_k : [t_0, T] \to \mathbb{R} \qquad \text{y también} \qquad f_k : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,.$$

Notaciones para las derivadas temporales:

$$Y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Y(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt}}_{n\text{-veces}} Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_d^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1. EDOs de orden n y forma estándar

Las EDOs lineales de orden n se pueden escribir en forma estándar, es decir como un sistema $n \times n$ del primer orden:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y = c$$

donde los coeficientes a_k y el lado derecho c pueden ser funciones de t.
En general si tenemos una EDO posiblemente nolineal de orden n:

$$y^{(n)}(t) = g\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

podemos escribirla en la forma estándar poniendo $y^{(k-1)} = Y_k$ y

$$\begin{cases} Y_1' = y' = Y_2 \\ Y_2' = y'' = Y_3 \\ \vdots \\ Y_n' = y^{(n)} = g\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = g\left(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right) \end{cases}$$

(E) Escribir la forma “vectorial” de la f.

...es una condición suficiente para la buena proposición del Problema PVI.

Definition

Dada $f : D \subseteq [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, decimos que es L-**Lipschitziana en** D **(o también Lipschitz con constante** $L > 0$ **en** D**) con respecto a su segunda variable** si existe $L > 0$ t.q. para todos $(t, Y), (t, \hat{Y}) \in D$

$$\|f(t, Y) - f(t, \hat{Y})\| \leq L\|Y - \hat{Y}\|.$$

Se note que $\|\cdot\|$ es una norma cualesquiera de $\mathbb{R}^d$:

1. ¿Ser Lipschitz depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?
2. ¿La constante L depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?

La Lipschitzianidad implica la unicidad de soluciones del PVI, y algo más:

Theorem (Unicidad y Dependencia Continua de los datos)

Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Sean $Y, \hat{Y}$ dos soluciones del PVI $t \in [t_0, T]$, con datos iniciales $Y_0, \hat{Y}_0$. Entonces para todo $t \in [t_0, T]$:

$$\|Y(t) - \hat{Y}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|Y_0 - \hat{Y}_0\| .$$

Las hipótesis del Teorema, siendo $D := [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$\boxed{(H_f) \begin{cases} (i) & f \text{ continua en } D \\ (ii) & f \text{ Lipschitziana en } D \text{ con respecto a su segunda variable} \end{cases}}$$

también garantizan la existencia, como veremos. (H_f) nos garantiza que el PVI es *un problema bien planteado (en el sentido de Hadamard)*.

Theorem (Existencia y Unicidad. (Picard, Lipschitz y Cauchy))

Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Entonces existe una unica solución del problema PVI en $[t_0, T]$.

Si quitamos la hipótesis de lipschitzianidad, la unicidad puede fallar (Peine de Peano), pero la continuidad es suficiente para garantizar la existencia local (y a veces la global).

El problema discreto de $Y'(t) = f(t, Y(t))$, con dato inicial $Y(t_0) = Y_0$, es dado un mallado $\{t_0, \ldots, t_N = T\} \subset [t_0, T]$, conjunto discreto de puntos, vamos a calcular unos valores $y_0, \ldots, y_N$ de $\mathbb{R}^d$ que permitan aproximar a la solución $Y(t)$ de (PVI), i.e.,

$$Y(t_n) = y_n + \text{error}_n, \qquad n = 0, \ldots, N,$$

de manera que podamos despreciar los errores $\text{error}_n \approx 0$.

Observación. Tipos de errores:

Error de arranque.

Error propio del algoritmo.

Propagación de los errores

Objetivos. Convergencia.

- Obtener valores y_n que puedan sustituir a $Y(t_n)$ porque no sabemos resolver $Y(t)$ (o es imposible, o es muy costoso)
- Problema 1: Identificar fórmulas (algoritmos) para calcular y_n.
- Problema 2: Controlar error_n

Sea $h_n = t_{n+1} - t_n$, el paso n del mallado, y sea $h = \max\{h_n,\ n = 0, \ldots, N-1\}$, nos planteamos que nuestro método converge si

$$\lim_{h \to 0} \|Y(t_n) - y_n\| = 0, \qquad \forall n,$$

y que converge con orden k si

$$\|\text{error}_n\| \leq Ch^k \qquad \forall n = 0, \ldots, N-1,$$

con C independiente de h y N.

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n Y'(t_n) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Usando (PVI)

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = y_n + h_n f_n} \qquad \text{Euler explícito}$$

donde denotamos $f_n = f(t_n, y_n)$.

Error de truncamiento de Euler

El error de truncamiento viene de utilizar una fórmula aproximada (Euler) en vez de la fórmula exacta (PVI).

- Tomo $y_n = Y(t_n)$
- Aplico Euler $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n))$
- Por Taylor $Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2$, $s \in (t_n, t_{n+1})$:

$$\text{Error local de truncamiento: } \tau_{n+1} = \frac{Y(t_{n+1}) - y_{n+1}}{h_n} = \frac{h_n}{2} Y''(s).$$

$$\text{Error global de truncamiento: } \quad \tau(h) = \max_{n=1,\ldots,N} |\tau_n| = \frac{Mh}{2}.$$

donde $M = \max_{s \in [t_0, T]} |Y''(s)|$.

Atención: el error de truncamiento es el originado al avanzar una vez el algoritmo.

Euler implícito

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n Y'(t_{n+1}) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Usando (PVI)

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n f_{n+1}} \qquad \text{Euler implícito}$$

Atención: no es (en general) inmediatamente resoluble porque puede ser no lineal. Entonces necesitaremos de métodos de resolución no lineales (Newton)

Método de Taylor

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n Y'(t_n) + \frac{1}{2} Y''(t_n) h_n^2 + \frac{1}{6} Y'''(s) h_n^3.$$

Usando (PVI), que $Y''(t_n) = f_t(t_n, Y(t_n)) + f_y(t_n, Y(t_n)) Y'(t_n)$

$$\begin{aligned} Y(t_{n+1}) &= Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2} f_t(t_n, Y(t_n)) h_n^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} f_y(t_n, Y(t_n)) f(t_n, Y(t_n)) h_n^2 + \frac{1}{6} Y'''(s) h_n^3. \end{aligned}$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f_n + \frac{h_n^2}{2} \left(f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n) f_n \right)} \qquad \text{Taylor orden 2}$$

Orden de truncatura 2 y explícito, pero necesita evaluar 2 funciones más...

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s_1, s_2 \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$
\begin{aligned}
Y(t_{n+1}) &= Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) + \frac{h_n}{2} Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} Y''\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} Y'''(s_1)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3, \\
Y(t_n) &= Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) - \frac{h_n}{2} Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} Y''\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} Y'''(s_2)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3,
\end{aligned}
$$

$$
Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} Y'''(s)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3
$$

Mejor orden pero el punto intermedio no está en el mallado.

Solución 1

Aproximamos el valor intermedio con Taylor

$$Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) = Y(t_n) + \frac{h_n}{2} f\left(t_n, Y\left(t_n\right)\right) + \frac{1}{2} Y''(s) \left(\frac{h_n}{2}\right)^2 .$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f_n\right)}$$

Método de Runge

Es un método Runge-Kutta explícito de 2 etapas

$$K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} K_1\right), \quad y_{n+1} = y_n + h_n K_2.$$

Demostrar que es de orden de truncatura 2.

Solución 2

Tomamos mallado equidistante ($h_n \equiv h$) y los pasos t_n, t_{n+1}, t_{n+2} y existe $s \in [t_n, t_{n+2}]$ tal

$$Y(t_{n+2}) = Y(t_n) + 2hf\,(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) + \frac{1}{3}Y'''(s)h^3$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}} \qquad \text{Tipo leap-frog}$$

Método multipaso (de dos pasos) y explícito. **Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

Solución 3. Crank-Nicolson.

Utilizando la aproximación del punto intermedio existe $s \in [t_n, t_{n+1}$ tq

$$Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) = \frac{Y'(t_n) + Y'(t_{n+1})}{2} + \frac{1}{2}Y'''(s)h_n^2$$

Usandolo

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{h_n}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right) + O\left(h_n^3\right)$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{\mathrm{y}_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}(f_n + f_{n+1})} \qquad \text{Crank-Nicolson}$$

Método implícito. **Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

Crank-Nicolson. Regla de trapecio

Otra forma de obtener fórmulas. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, Y(s))\, ds$$

Aproximamos la integral con reglas de cuadratura, p.e., la regla del trapecio

$$\int_a^b f(s)\, ds = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in [a, b].$$

Aplicando esta regla obtenemos Crank-Nicolson (trapecio) y se prueba que es de orden de truncatura 2.

Construcción de métodos

- Métodos de Taylor.
- Métodos de Cuadratura.
- Métodos por diferenciación numérica.
- Métodos de colocación.