# Problemas de valor inicial

Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Septiembre 2021

**Objetivos**

- Qué es un problema de valor inicial
- Discretización, mallados
- Diferenciación numérica.

**Algunos métodos numéricos**

- Euler: forward, backward
- Leap-frog y euler modificado
- Método de Taylor
- Trapecio

# Resolver una EDO

$$\begin{cases} Y'(t) = \overset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} Y(t) + \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 \operatorname{sen}(t) + b_1 \cos t \\ a_2 \operatorname{sen}(t) + b_2 \cos t \end{pmatrix}$$

$$2a_1 - a_2 - b_1 = 2 \qquad a_1 + 2b_1 - b_2 = 0$$

$$-a_1 + 2a_2 - b_2 = -2 \qquad -b_1 + a_2 + 2b_2 = 2$$

$Y_h(t)$ , autovalores de $A = -1, -3$
autovectores de $A$

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1 = 1 & a_2 = 0 \\ b_2 = 1 & b_1 = 0 \end{matrix}$$

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = Y_h(0) + Y_p(0) \Rightarrow Y_h(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = 2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

# PVI: Problema de Valor Inicial

El marco teórico de los métodos numéricos se va a plantear sobre la siguiente EDO de orden 1 en *forma estándar*

**Definition**

El Problema de Valor Inicial (o Problema de Cauchy) para $Y(t) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & \text{para todo } t \in [t_0, T] \\ Y(t_0) = Y_0, & \textit{dato inicial } Y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{PVI}$$

donde $f : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua en $D := (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable.

No todas las EDOs de orden 1 se pueden escribir en forma estándar:

$$F(t, Y(t), Y'(t)) = 0$$

① $Y' = \frac{3}{2} Y^{1/3}$ $\quad Y(0)=0$ $\quad f(t,Y) = \frac{3}{2} Y^{1/3}$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$Y(t) = t^{3/2}$ $\quad Y'$

$$Y'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{3}{2} \left(t^{3/2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} Y^{1/3}$$

$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$ $\quad h \to 0$ $\quad y_n \simeq Y(t_n)$

$y_0 = 0$ $\quad y_1 = y_0 + h f(0, y_0)$

$y_1 = 0 + h f(0,0) = 0 + h \cdot 0 = 0$

$t_0 = 0$

$t_1 = h$

$t_2 = 2h$

$\vdots$

$y_n = 0$

$$|f(t,y) - f(t,0)| \le \frac{3}{2} |y^{1/3}| = \frac{3}{2|y|^{2/3}} |y|$$

$$\frac{3}{2} |y|^{-\frac{2}{3}} \le L \quad , \text{ entorno de } 0.$$

$$\frac{3}{2L} \le |y|^{\frac{2}{3}} \qquad \left(\frac{3}{2L}\right)^{3/2} \le |y|$$

$|f(t,y) - f(t,0)| \le L\,|y|$ no se verifica

para algún entorno de 0

# Notaciones

El tiempo $t$ siempre se considera en un intervalo $[t_0, T] \subseteq [0, \infty)$.
Recordamos las notaciones vectoriales

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y también} \qquad f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, Y(t)) \end{pmatrix}$$

donde las componentes son dadas por las funciones

$$Y_k : [t_0, T] \to \mathbb{R} \qquad \text{y también} \qquad f_k : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,.$$

Notaciones para las derivadas temporales:

$$Y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Y(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt}}_{n\text{-veces}} Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_d^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

# Ejemplo 1. EDOs de orden $n$ y forma estándar

Las EDOs lineales de orden $n$ se pueden escribir en forma estándar, es decir como un sistema $n \times n$ del primer orden:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y = c$$

donde los coeficientes $a_k$ y el lado derecho $c$ pueden ser funciones de $t$.
En general si tenemos una EDO posiblemente nolineal de orden $n$:

$$y^{(n)}(t) = g\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

podemos escribirla en la forma estándar poniendo $y^{(k-1)} = Y_k$ y

$$\begin{cases} Y_1' = y' = Y_2 \\ Y_2' = y'' = Y_3 \\ \vdots \\ Y_n' = y^{(n)} = g\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = g\left(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right) \end{cases}$$

(E) Escribir la forma “vectorial” de la $f$.

. . . es una condición suficiente para la buena proposición del Problema PVI.

**Definition**

Dada $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, decimos que es $L$-**Lipschitziana en** $D$ **(o también Lipschitz con constante** $L > 0$ **en** $D$**) con respecto a su segunda variable** si existe $L > 0$ t.q. para todos $(t, Y), (t, \hat{Y}) \in D$

$$\|f(t, Y) - f(t, \hat{Y})\| \leq L\|Y - \hat{Y}\| . \qquad \forall\, Y, \hat{Y} \in$$

Se note que $\|\cdot\|$ es una norma cualesquiera de $\mathbb{R}^d$:

1. ¿Ser Lipschitz depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?
2. ¿La constante $L$ depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?

$\|\cdot\|_p \quad p = [1, \infty] \quad \sim$ son equivalentes

# Unicidad de soluciones para PVI

La Lipschitzianidad implica la unicidad de soluciones del PVI, y algo más:

**Theorem (Unicidad y Dependencia Continua de los datos)**

*Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en $D$ y L-Lipschitziana en $D$ con respecto a su segunda variable. Sean $Y, \hat{Y}$ dos soluciones del PVI $t \in [t_0, T]$, con datos iniciales $Y_0, \hat{Y}_0$. Entonces para todo $t \in [t_0, T]$:*

$$\|Y(t) - \hat{Y}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|Y_0 - \hat{Y}_0\| .$$ $K(t)$

Las hipótesis del Teorema, siendo $D := [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$(H_f) \begin{cases} (i) & f \text{ continua en } D \\ (ii) & f \text{ Lipschitziana en } D \text{ con respecto a su segunda variable} \end{cases}$$

también garantizan la existencia, como veremos. $(H_f)$ nos garantiza que el PVI es *un problema bien planteado (en el sentido de Hadamard)*.

**Theorem (Existencia y Unicidad. (Picard, Lipschitz y Cauchy))**

*Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en $D$ y L-Lipschitziana en $D$ con respecto a su segunda variable. Entonces existe una unica solución del problema PVI en $[t_0, T]$.*

Si quitamos la hipótesis de lipschitzianidad, la unicidad puede fallar (Peine de Peano), pero la continuidad es suficiente para garantizar la existencia local (y a veces la global).

# Problema numérico

El problema discreto de $Y'(t) = f(t, Y(t))$, con dato inicial $Y(t_0) = Y_0$, es dado un mallado $\{t_0, \ldots, t_N = T\} \subset [t_0, T]$, conjunto discreto de puntos, vamos a calcular unos valores $y_0, \ldots, y_N$ de $\mathbb{R}^d$ que permitan aproximar a la solución $Y(t)$ de (PVI), i.e.,

$$Y(t_n) = y_n + \text{error}_n, \qquad n = 0, \ldots, N,$$

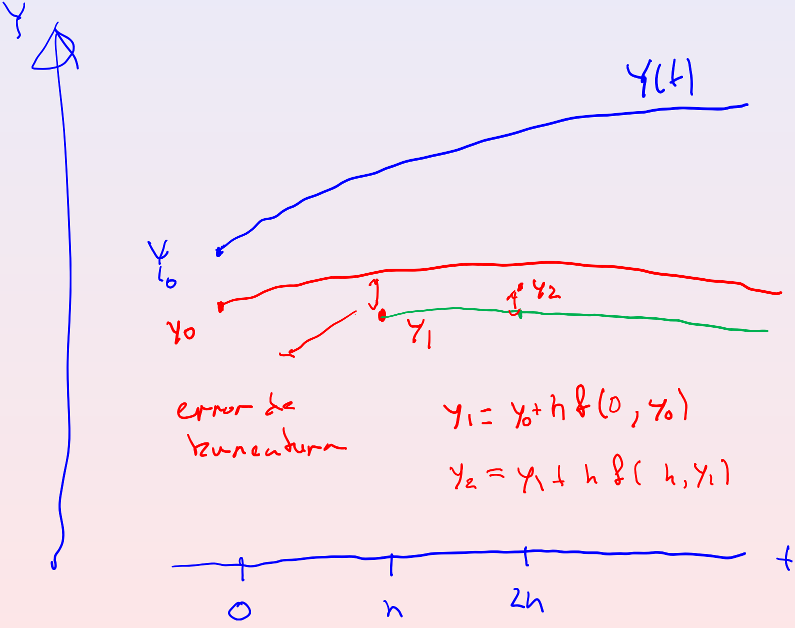
de manera que podamos despreciar los errores $\text{error}_n \approx 0$.

**Observación**. Tipos de errores:

Error de arranque.

Error propio del algoritmo.

Propagación de los errores




error de truncatura

$$y_1 = y_0 + h\, f(0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h\, f(h, y_1)$$

# Objetivos. Convergencia.

- Obtener valores $y_n$ que puedan sustituir a $Y(t_n)$ porque no sabemos resolver $Y(t)$ (o es imposible, o es muy costoso)
- Problema 1: Identificar fórmulas (algoritmos) para calcular $y_n$.
- Problema 2: Controlar $\text{error}_n$

Sea $h_n = t_{n+1} - t_n$, el paso $n$ del mallado, y sea $h = \max\{h_n,\ n = 0, \ldots, N-1\}$, nos planteamos que nuestro método converge si

$$\lim_{h\to 0} \|Y(t_n) - y_n\| = 0, \qquad \forall n,$$

y que converge con orden $k$ si

$$\|\text{error}_n\| \leq Ch^k \qquad \forall n = 0, \ldots, N-1,$$

con $C$ independiente de $h$ y $N$.

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n Y'(t_n) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Usando (PVI)

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = y_n + h_n f_n} \qquad \text{Euler explícito}$$

donde denotamos $f_n = f(t_n, y_n)$.

# Error de truncamiento de Euler

El error de truncamiento viene de utilizar una fórmula aproximada (Euler) en vez de la fórmula exacta (PVI).

- Tomo $y_n = Y(t_n)$
- Aplico Euler $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n))$
- Por Taylor $Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2$, $s \in (t_n, t_{n+1})$:

Error local de truncamiento: $\tau_{n+1} = \dfrac{Y(t_{n+1}) - y_{n+1}}{h_n} = \dfrac{h_n}{2} Y''(s).$

Error global de truncamiento: $\tau(h) = \max\limits_{n=1,\dots,N} |\tau_n| = \dfrac{Mh}{2}.$

donde $M = \max\limits_{s \in [t_0, T]} |Y''(s)|$.

**Atención:** el error de truncamiento es el originado al avanzar una vez el algoritmo.

# Euler implícito

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n Y'(t_{n+1}) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Usando (PVI)

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n f_{n+1}} \qquad \text{Euler implícito}$$

**Atención**: no es (en general) inmediatamente resoluble porque puede ser no lineal. Entonces necesitaremos de métodos de resolución no lineales (Newton)

$$y_n = y_{n+1} - h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n \underbrace{f(t_{n+1}, y_{n+1})}_{f(t_n, y_n)}}$$ ec. no lineal

Quiero calcular $y_{n+1} = F(t_n; y_n; h)$

Metodo implícito, $y_{n+1}$ está en la derecha y en la izquierda del algoritmo

Error de truncatura de Euler implícito

$$\|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}\|$$

$$y_{n+1} = Y(t_n) + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$= \| \cancel{Y(t_n)} + h_n \underbrace{f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))}_{Y'(t_{n+1})} - \frac{h_n^2}{2} Y''(\underbrace{s}_{s\in(t_n,t_{n+1})}) - \cancel{Y(t_n)} - h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) \|$$

$$\leq h_n \| f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1}) \| + \|Y''(s)\| \frac{h_n^2}{2}$$

$$\leq h_n L \|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}\| + \|Y''(s)\| \frac{h_n^2}{2} \qquad h_n L < \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} \|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq \|Y''(s)\| \frac{h_n^2}{\cancel{2}} \Rightarrow \tau_n \leq \|Y''(s)\| h_n$$

$$s \in (t_n, t_{n+1})$$

Problema V. I $\quad Y'(t) = f(t, Y(t)) \quad t \in [t_0, T]$

$$Y(t_0) = Y_0$$

$y_{n+1} = y_n + h f(t_n + h, y_{n+1})$ $\quad y_n = Y(t_0 + nh)$

Existe $x \in \mathbb{R}^d$ $\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Paso equidistante

$$x = y_n + h f(t_n + h, x) = F(x)$$

$$x_{n+1} = F(x_n) \qquad x_0 = y_n$$

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} F(x_{n-1}) = F(x)$$

$$0 = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} - x_n = \lim_{n \to \infty} F(x_n) - F(x_{n-1})$$

$$\|F(x_n) - F(x_{n-1})\| = \|\cancel{y_n} + h f(t_n+h, x_n) - (\cancel{y_n} + h f(t_n+h, x_{n-1}))\|$$

$$= h \|f(t_n+h, x_n) - f(t_n+h, x_{n-1})\|$$

$$\leq h L \|x_n - x_{n-1}\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq h L \|x_n - x_{n-1}\|$$

$$\leq (hL)^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\|$$

$$\leq (hL)^k \|x_1 - x_0\|$$

$$\Rightarrow \boxed{hL < 1} \quad \lim_{n\to\infty} x_n - x_{n-1} = 0 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{tq} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$\rightarrow$ Necesitamos que $h$ sea suficientemente pequeña

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n Y'(t_n) + \frac{1}{2} Y''(t_n) h_n^2 + \frac{1}{6} Y'''(s) h_n^3.$$

Usando (PVI), que $Y''(t_n) = f_t(t_n, Y(t_n)) + f_y(t_n, Y(t_n)) Y'(t_n)$

$$\begin{aligned} Y(t_{n+1}) &= Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2} f_t(t_n, Y(t_n)) h_n^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} f_y(t_n, Y(t_n)) f(t_n, Y(t_n)) h_n^2 + \frac{1}{6} Y'''(s) h_n^3. \end{aligned}$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f_n + \frac{h_n^2}{2} \left( f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n) f_n \right)}$$

Taylor orden 2

d + δxd

Orden de truncatura 2 y explícito, pero necesita evaluar 2 funciones más...

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y''(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))}_{\mathbb{R}^d} + \underbrace{y'(t)}_{\mathbb{R}^d} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))}_{\text{Jacobiano}} \in M_{d\times d}$$

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s_1, s_2 \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) + \frac{h_n}{2} Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2} Y''\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} Y'''(s_1)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3, \quad s_1 \in \left(t_n + \frac{h_n}{2}, t_{n+1}\right)$$

$$Y(t_n) = Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) - \frac{h_n}{2} Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) \quad s_2 \in \left(t_n, t_n + \frac{h_n}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2} Y''\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} Y'''(s_2)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3,$$

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} Y'''(s)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3$$

$$\underbrace{f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right)}_{= Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)}$$

Mejor orden pero el punto intermedio no está en el mallado. $s \in (t_n, t_n + h_n)$

# Solución 1

Aproximamos el valor intermedio con Taylor $Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)$

$$Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) = Y(t_n) + \frac{h_n}{2} f\left(t_n, Y\left(t_n\right)\right) + \frac{1}{2} Y''(s)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f_n\right)}$$

Método de Runge

Es un método Runge-Kutta explícito de 2 etapas

$$K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} K_1\right), \quad y_{n+1} = y_n + h_n K_2.$$

**Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + O(h_n^3)$$

$$= Y(t_n) + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \underline{Y(t_n)} + \frac{h_n}{2} f(t_n, Y(t_n)) + O(h^2)\right) +$$

$$+ O(h^3)$$

$Y(t_n) \approx y_n$ errores pasemos de ellos

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

$\underline{k_1} = f(t_n, y_n)$

$\underline{k_2} = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} k_1\right)$ $\quad y_{n+1} = y_n + h_n k_2$

Metodo de un paso pero con dos pasos intermedios

# Solución 2

Tomamos mallado equidistante ($h_n \equiv h$) y los pasos $t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$ y existe $s \in [t_n, t_{n+2}]$ tal

$$Y(t_{n+2}) = Y(t_n) + 2hf\left(t_{n+1}, Y(t_{n+1})\right) + \frac{1}{3}Y'''(s)h^3$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}} \qquad \text{Tipo leap-frog}$$

Método multipaso (de dos pasos) y explícito. **Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

# Solución 3. Crank-Nicolson.

Utilizando la aproximación del punto intermedio existe $s \in [t_n, t_{n+1}$ tq

$$Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) = \frac{Y'(t_n) + Y'(t_{n+1})}{2} + \frac{1}{2}Y'''(s)h_n^2$$

Usandolo

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{h_n}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right) + O\left(h_n^3\right)$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}(f_n + f_{n+1})}$$

Crank-Nicolson, Trapecio

Método implícito. **Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

$f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right) = y_n + \frac{h}{2}\left\{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right\}$$

$$= \cancel{Y(t_n)} + \frac{h}{2}\left\{f(\cancel{t_n, Y(t_n)}) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right\}$$

$$Y(t_{n+1}) = \cancel{Y(t_n)} + h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + O(h^3)$$

$$= \cancel{Y(t_n)} + h\left(\frac{f(\cancel{t_n, Y(t_n)}) + f(t_n + h, Y(t_n + h))}{2}\right) + O(h^3)$$

$$Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h}{2} f(t_n + h, Y(t_n + h)) - \frac{h}{2} f(t_n + h, y_{n+1}) + O(h^3)$$

$$\| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \| \le \frac{h}{2} \| f(t_n + h, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1}) \| + O(h^3)$$

$$t_{n+1} = t_n + \underbrace{h_n}_{h}$$

$$\| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \| \le \frac{hL}{2} \| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \| + O(h^3)$$

Supongo que $\frac{hL}{2} \le \frac{1}{2}$ $\quad hL \le 1$

$$\Rightarrow \| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \| \le c h^3 \sim O(h^3)$$

$$\tau_n = \frac{\| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \|}{h} \le \frac{c h^3}{h} = c h^2$$

$$\int_a^b f(s)\,ds \approx f(c)\cdot(b-a) \quad \text{con } c \in (a,b)$$

Reglas de cuadratura . 1º Cálculo Numérico

Recordar $$\int_a^b F(s)\,ds - F(c)\cdot(b-a) = F'(s)\,(b-a)$$

$s \in (a,b)$

$$c = \frac{a+b}{2} \qquad \int_a^b F(s)\,ds - F(c)\,(b-a) = \frac{F''(s)(b-a)}{2}$$

PVI $\quad Y'(t) = f(t, Y(t))$ $\quad$ integro entre $t_n, t_{n+1}$

TFC $$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, Y(s))\,ds$$

# Crank-Nicolson. Regla de trapecio

**Otra forma de obtener fórmulas**. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, Y(s))\, ds$$

Aproximamos la integral con reglas de cuadratura, p.e., la regla del trapecio

$$\int_a^b f(s)\, ds = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in [a, b].$$

Aplicando esta regla obtenemos Crank-Nicolson (trapecio) y se prueba que es de orden de truncatura 2.

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{h_n}{2}\left( f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right)$$

$$\text{''}\ (t_{n+1}-t_n)/2 \qquad - \frac{(t_{n+1}-t_n)^3}{12}\, \partial_1^2 f(s, Y(s)) \qquad \text{''}\ Y''(s)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h_n}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right)$$

$$- \frac{h_n^3}{12} y'''(s) \qquad s \in (t_n, t_{n+1})$$

$\{y(t_n)\} \approx y_n$ eliminamos los errores

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$$= y_n + \frac{h_n}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right)$$

$$Y(t_{n+2}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(s, Y(s))\, ds$$

Pregunta: ¿Cómo podemos aproximar funcion?

Utilizar interpolación.

$f(s, Y(s)) \doteq f(t_n, Y(t_n))$ y $f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))$

$$r(t) = f(t_n, Y(t_n)) + \frac{f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) - f(t_n, Y(t_n))}{h}(t - t_n)$$

$$Y(t_{n+2}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} r(s)\, ds + \text{Error.}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} \left( f(t_n, y(t_n)) + \frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_n, y(t_n))}{h} (s - t_n) \right) ds$$

$$= f(t_n, y(t_n)) \overbrace{(t_{n+2} - t_n)}^{=2h} + \frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_n, y(t_n))}{h} \overbrace{\frac{(t_{n+2} - t_n)^2}{2}}^{\frac{(2h)^2}{2}}$$

$$= f(t_n, y(t_n)) \left( \cancel{2h - \frac{(2h)^2}{2h}} \right) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \frac{(2h)^2}{2h}$$

$$= 2h\, f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$y(t_{n+2}) - y(t_n) = 2h\, f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + \text{Error}$$

$$\{y(t_n)\} \approx \{y_n\}$$

$$y_{n+2} - y_n = 2h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Leap-frog (salto de rana)