Convergencia. Teorema de equivalencia.

Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Septiembre 2021

Objetivo:
Demostrar la convergencia de métodos numéricos para EDO

- Convergencia, orden de convergencia.
- Definición de método numérico. Función incremento.
- 0-estabilidad.
- Consistencia, orden de consistencia.
- Estabilidad. Criterio de la raíz.
- Teorema de equivalencia.

$$\text{Consistencia} + \text{Estabilidad} \iff \text{Convergencia}$$

Convergencia. Orden de convergencia

Definición (Convergencia de un MN)

Un método numérico de k-pasos se dice *convergente* si para todo (PVI) tenemos

$$\lim_{h\to 0} \max_{k\le n\le N} \|Y(t_n) - y_n\| = 0 \quad \text{si} \quad \lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le k-1} \|Y(t_n) - y_n\| = 0.$$

Definición (Orden p)

Un método numérico de k-pasos se dice *convergente de orden p* si para todo (PVI) con f q-veces diferenciable $(q \le p)$ tenemos que cuando $h \to 0^+$

$$\max_{k\le n\le N} \|Y(t_n) - y_n\| = O(h^q) \quad \text{si} \quad \max_{0\le n\le k-1} \|Y(t_n) - y_n\| = O(h^q).$$

Métodos Numéricos

Definition (PVI)

El Problema de Valor Inicial (o Problema de Cauchy) para $Y(t) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & \text{para todo } t \in [t_0, T] \\ Y(t_0) = Y_0, & \textit{dato inicial } Y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad \text{(PVI)}$$

donde $f : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua en $D := (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable.

- Dado un mallado $\{t_0, \ldots, t_N\} \subset [t_0, T]$, $t_{n+1} = t_n + h_n$, $h = \max_{n=0,\ldots,N-1} h_n$
- Calcular unos valores $y_0, \ldots, y_N$ de $\mathbb{R}^d$ que permitan aproximar a la solución $Y(t)$ de (PVI), i.e., $Y(t_n) = y_n + \text{error}_n, \qquad n = 0, \ldots, N$
- Por simplicidad, supondremos que el mallado es equi-espaciado, es decir $h_n = h$, $\boxed{t_n = t_0 + nh}$, para $n = 0, \ldots, N$.

Métodos Numéricos y Función de Incremento

Todos los métodos numéricos estudiados hasta ahora, y prácticamente todos los que se usan habitualmente, se pueden escribir en la forma:

Definición

Un método de k-pasos se define

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\, \phi_f(t_n, y_n, \ldots, y_{n+k-1}\,;\, h),} \qquad n = 0, \ldots, N-k, \quad \text{(MN)}$$

con $\alpha_k \neq 0$ y, $\alpha_0 \neq 0$ o ϕ_f depende explicitamente de y_n. ϕ_f se conoce como la *Función de Incremento*,

$$\phi_f : (t_0, T) \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{k \text{ veces}} \times (0, h_0) \to \mathbb{R}^d.$$

Ejemplos

Métodos explícitos VS implícitos,...

Observaciones.

- ϕ_f depende de sus argumentos a través de la función f (y algunas veces de sus derivadas!).
- (MN) nos da un algoritmo que a partir de los datos t_n, $y_n, \ldots, y_{n+k-1}$ (k valores de $\mathbb{R}^d$) e h, utilizando la función incremento ϕ_f y unas operaciones algebraícas básicas obtenemos y_{n+k}.
- Supondremos que $\alpha_k = 1$(normalizamos)

Definición

- Si la función de incremento ϕ_f se puede expresar explícitamente en términos de f (y tal vez de sus derivadas), *el método es Explícito*.
- En caso contrario, *el método es Implícito*.

- Es necesario disponer de k *valores de arranque* $y_0, \ldots, y_{k-1}$. Sin embargo el (PVI) solo proporciona y_0.
- Si $k \geq 2$, habrá que obtener los $k-1$ valores de arranque restantes por algún otro procedimiento (p. ej. desarrollo de Taylor, un método de un solo paso, etc.)

Las Hipótesis (H_{MN})

Para todos los ejemplos vistos hasta ahora, ϕ_f satisface las siguientes propiedades

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \phi_f \text{ es continua (en todas sus variables)} \\ (ii) & \text{existen constantes } h_0 > 0 \text{ y } L > 0 \text{ tales que} \\ & \|\phi_f(t_n, y_n, \ldots, y_{n+k-1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \ldots, \hat{y}_{n+k-1}; h)\| \\ & \qquad \leq L \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \|y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}\| \text{ si } 0 < h < h_0 \\ (iii) & \text{si } f \equiv 0 \text{ entonces } \phi_f \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (H_{MN})$$

En el resto del curso nos restringiremos a los métodos de la forma (MN) que verifiquen las hipótesis (H_{MN})

El trapecio satisface (H_{MN}).

Teorema M de Weierstrass

Herramienta para demostrar la continuidad de la función incremento en MN implícitos es:

Theorem (Teorema M de Weierstrass)

Sea $\psi_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones. Supongamos que para cada ψ_n existe $M_n > 0$ tal que $\|\psi_n\| \leq M_n$ y además $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$. Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\| < +\infty$ y la convergencia es uniforme en Ω.

Observaciones.

- Si Ω es un espacio topológico y las ψ_n son continuas, entonces la suma de la serie $\psi = \displaystyle\sum_n \psi_n$ es también continua.
- En nuestro caso, $\Omega = [t_0, T] \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{k \text{ veces}} \times (0, h_0)$

Residuo

Salvo casos (muy) excepcionales, la solución teórica $Y(t)$ del (PVI) no satisface la recurrencia (MN) que define el método numérico:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j Y(t_{n+j}) := h\,\phi_f(t_n, Y(t_n), \dots, Y(t_{n+k-1})\,;\,h) + R_n, \quad n = 0, \dots, N-k$$

Definición (Residuo)

La cantidad R_n se conoce como *el residuo*.
Es lo que le falta a la solucióndе la EDO para ser solución del método numérico en un paso.

Nota.

- La solución producida por el ordenador, tampoco es solución de la ecuación del método (MN), pues los errores de redondeo introducen pequeñas perturbaciones.
- En general, tampoco ϕ_f se calcula exactamente, solo de forma aproximada.
- En realidad el ordenador produce soluciones de una recurrencia perturbada.

Residuo

Salvo casos (muy) excepcionales, la solución teórica $Y(t)$ del (PVI) no satisface la recurrencia (MN) que define el método numérico:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j Y(t_{n+j}) := h\,\phi_f(t_n, Y(t_n), \ldots, Y(t_{n+k-1})\,;\, h) + R_n, \quad n = 0, \ldots, N-k$$

Definición (Residuo)

La cantidad R_n se conoce como *el residuo.*
Es lo que le falta a la solucíonde la EDO para ser solución del método numérico en un paso.

Nota.

- La solución producida por el ordenador, tampoco es solución de la ecuación del método (MN), pues los errores de redondeo introducen pequeñas perturbaciones.
- En general, tampoco ϕ_f se calcula exactamente, solo de forma aproximada.
- En realidad el ordenador produce soluciones de una recurrencia perturbada.

0-Estabilidad

Definición (0-Estabilidad)

Un método numérico (MN) se dice 0-*estable* si para todo (PVI) existe una constante $C > 0$(que no depende de N, ni de h) tal que para cada dos sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^N$, $\{v_n\}_{n=0}^N$ t. q.

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} - h\,\phi_f(t_n, u_n, \ldots, u_{n+k-1}\,;\,h) = h\delta_n, \quad n = 0, \ldots, N-k$$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j v_{n+j} - h\,\phi_f(t_n, v_n, \ldots, v_{n+k-1}\,;\,h) = h\gamma_n, \quad n = 0, \ldots, N-k$$

se verifica que

$$\max_{k\le n\le N} \|u_n - v_n\| \le C\left(\max_{0\le n\le k-1} \underbrace{\|u_n - v_n\|}_{\text{datos de arranque}} + \max_{0\le n\le N-k} \|\delta_n - \gamma_n\| \right)$$

0-Estabilidad

Corolario

- Si un método (MN) es 0-estable y

$$\tau(h) := \frac{1}{h} \max_{0 \leq n \leq N-k} \|R_n\| \xrightarrow{h \to 0^+} 0$$

  entonces **el método es convergente.**

- Si además para todo $q \leq p$ se tiene que

$$\tau(h) := \frac{1}{h} \max_{0 \leq n \leq N-k} \|R_n\| = O\left(h^q\right)$$

  para todo (PVI) con $f \in C^q$, entonces **el método es convergente de orden al menos p.**

Prueba. Basta con tomar $u_n = Y(t_n)$, $v_n = y_n$, $\delta_n = R_n/h$ y $\gamma_n = 0$ en la definición de 0-Estabilidad.

Criterio de la Raíz

Como hemos visto en el ejemplo, la 0-estabilidad está relacionada con las raíces del polinomio

$$\boxed{\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j}$$

Primer Polinomio Característico

es decir, el polinomio que encontramos aplicando el MN a la función $f \equiv 0$.

Definición

Se dice que un método numérico (MN) satisface la *condición de la raíz* si todas las raíces del primer polinomio característico tienen módulo menor o igual que 1, y aquellas que tienen módulo 1, son simples.

- Si un MN es consistente una de las raíces de $\rho(\zeta)$ tiene que ser 1: esta es la *Raíz Principal*, $\zeta_1 = 1$.
- Las raíces restantes $\zeta_2, \ldots, \zeta_k$ se llaman *raíces espurias.*
- Los métodos consistentes de un paso, no tienen raíces espurias.

Theorem (Criterio de la Raíz - Caracterización de la 0-estabilidad)

Un método numérico (MN) *es* 0*-estable si, y solo si, satisface la condición de la raíz.*

Es decir, si y solo si, todas las raíces del primer polinomio característico

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j$$

tienen módulo menor o igual que 1, y aquellas que tienen módulo 1, son simples.

Consistencia

La 0-estabilidad garantiza que si $\tau(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ entonces el método es convergente, además, si

$$\tau(h) := \max_{0 \leq n \leq N-k} \frac{\|R_n\|}{h} = O\big(h^p\big)$$

para todo (PVI), entonces el método es convergente de orden p.

Definición (Consistencia)

Un método de la forma (MN) *es consistente* si para todo (PVI) se tiene que $\lim_{h \to 0^+} \tau(h) = 0$.

Decimos que *es consistente de orden p*, si es consistente y además p es el mayor entero tal que para todo (PVI) con $f \in C^q$, con $q \leq p$, tenemos que $\tau(h) = O\big(h^q\big)$, cuando $h \to 0^+$.

Caracterización de la Consistencia

Theorem (Consistencia)

Un método (MN) *que satisface las hipótesis* (H_{MN}) *es consistente si y solo si*

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 \tag{C1}$$

y además para $t \in [t_0, T]$ *e* $Y \in \mathbb{R}^d$

$$\phi_f(t, Y, \ldots, Y; 0) = \left(\sum_{j=0}^{k} j\alpha_j \right) f(t, Y) \tag{C2}$$

Ejemplo. Los métodos de un paso (recuerdo que $\alpha_1 = 1$) son consistentes si y solo si

$$(\alpha_1 = 1) \qquad \alpha_0 = -1 \qquad \text{y} \qquad \phi_f(t, Y; 0) = f(t, Y)$$

Ex: Comprobar que la Regla del Trapecio es consistente (ejercicio!).

Caracterización de la Consistencia

Theorem (Consistencia)

Un método (MN) *que satisface las hipótesis* (H_{MN}) *es consistente si y solo si*

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 \tag{C1}$$

y además para $t \in [t_0, T]$ *e* $Y \in \mathbb{R}^d$

$$\phi_f(t, Y, \ldots, Y; 0) = \left(\sum_{j=0}^{k} j\alpha_j \right) f(t, Y) \tag{C2}$$

Ejemplo. Los métodos de un paso (recuerdo que $\alpha_1 = 1$) son consistentes si y solo si

$$(\alpha_1 = 1) \qquad \alpha_0 = -1 \qquad \text{y} \qquad \phi_f(t, Y; 0) = f(t, Y)$$

Ex: Comprobar que la Regla del Trapecio es consistente (ejercicio!).

El Teorema de Equivalencia

Hemos visto que

$$\boxed{\text{0-Estabilidad}} \quad \oplus \quad \boxed{\text{Consistencia}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Convergencia}}$$

$$\boxed{\text{Criterio de la Raíz}} \quad \oplus \quad \boxed{(C1) \text{ y } (C2)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Convergencia}}$$

La pregunta natural es

¿Será cierta la implicación contraria?

Theorem (Teorema de Equivalencia - Caracterización de la Convergencia)

Un método (MN) *que satisface las condiciones* (H_{MN}) *es convergente si, y solo si, es 0-estable y consistente.*

Prueba del Teorema de Equivalencia.

Recordando el Corolario a la definición de 0-estabilidad:

Corolario

- Si un método (MN) es 0-estable y consistente, es decir

$$\tau(h) := \frac{1}{h} \max_{0 \le n \le N-k} \|R_n\| \xrightarrow{h \to 0^+} 0$$

  entonces **el método es convergente.**
- Si además $\tau(h) = O\big(h^q\big)$ para todo $q \le p$ y todo (PVI) con $f \in C^q$, entonces **el método es convergente de orden al menos p.**

Para probar el Teorema, solo nos queda probar una implicación:
si el método es convergente, entonces es 0-estable y consistente.
Probaremos las dos implicaciones por separado, empezando con la 0-estabilidad.