Problemas Stiff. Estabilidad

Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Octubre 2021

Estabilidad es la cualidade de **estable**. Se es estable cuando se mantiene sin peligro de cambiar, que mantiene el equilibrio.

Un PVI es **stiff** (difícil) si su solución numérica requiere para algunos métodos una significativa reducción del tamaño del paso h.

Contenidos del tema:

- Resolver $Y' = \lambda Y$ con Euler.
- Precisión y estabilidad.
- Región de estabilidad.
- A-estabilidad.

Resolviendo $Y' = \lambda Y$

Considerando dato inicial $Y(0) = 1$, tengo $Y(t) = e^{\lambda t}$. El método de Euler nos define la sucesión:

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n = (1 + \lambda h) y_n$$

Definiendo error $e_n = Y(t_n) - y_n$, resulta

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e^{\lambda(t_n+h)} - (1+\lambda h) y_n = e^h Y(t_n) - (1+\lambda h) y_n \\ &= e^h Y(t_n) - (1+\lambda h) Y(t_n) + (1+\lambda h) Y(t_n) - (1+\lambda h) y_n \\ &= (1+\lambda h) e_n + e^{\lambda t_n}[e^{\lambda h} - (1+\lambda h)] \end{aligned}$$

Entonces, como $e^{\lambda h} - (1 + \lambda h) = O(h^2)$,

$$e_{n+1} = (1+\lambda h) e_n + ER_n \quad \text{con } ER_n \leq c \frac{|\lambda h|^2}{2} e^{\lambda t_n}.$$

- Para que los residuos sean pequeños, $h \leq h_p$. Condición de **precisión**.
- h_p depende del método, de la regularidad de la solución y de la precisión requerida
- Que los errores no se propaguen, $|1 + \lambda h| < 1$. Así, $h \leq h_e$. Condición de **estabilidad**.
- h_e depende del método y del valor de λ.

Cómo son las EDO dependiendo del λ.

- Si $\mathrm{Re}(\lambda) >> 1$, problema muy inestable
- Si $|\mathrm{Re}(\lambda)| << 1$, las curvas de las soluciones permanecen casi paralelas en intervalos de tiempo moderados. Estabilidad neutra.
- Si $\mathrm{Re}(\lambda) << -1$, la ecuación es muy estable

Analizar las condiciones de precisión y estabilidad de Euler

$$R_n \leq c e^{\lambda t_n} \frac{|\lambda h|^2}{2}, \qquad |1 + \lambda h| < 1.$$

Por qué interesa $Y' = \lambda Y$

Sea el PVI en $[t_0, T]$

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad \text{con } Y(t_0) = Y_0.$$

Localmente, alrededor de (t_0, Y_0) es equivalente al PVI

$$\begin{aligned} Y'(t) &= f(t_0, Y_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, Y_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, Y_0)(Y(t) - Y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(t_0) Y(t) + f(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0) Y_0 + \frac{\partial f}{\partial t}(t_0)(t - t_0). \end{aligned}$$

Problema linealizado. La estabilidad del método Euler depende de los autovalores del Jacobiano de la f...

Dado el (PVI): $Y'(t) = \lambda Y(t)$ con $Y(0) = 1$

Definición (Región (dominio) de estabilidad)

Dado un método numérico (MN) donde y_n denota la aproximación a la solución del (PVI) en tiempo t_n con paso $h > 0$ constante, entonces definimos la región de estabilidad (lineal o absoluta) $\mathcal{D}_{MN}$ como

$$\mathcal{D}_{MN} = \{z = \lambda h \in \mathbb{C} \ : \ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

- **Euler explícito**: $\mathcal{D}_e = \{z \in \mathbb{C} \ : |1 + z| < 1\}$.
- **Euler implícito**: $\mathcal{D}_{ei} = \{z \in \mathbb{C} \ : |1 - z| > 1\}$.
- **Trapecio**: $\mathcal{D}_t = \{z \in \mathbb{C} \ : |2 + z| < |2 - z|\}$.

Observación: Cuanto más grande sea la región $\mathcal{D}$ en $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \ : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ menos restrictiva será la condición de estabilidad.

Estabilidad en métodos de un paso

Dado un método numérico de un paso

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi_f(t_n, y_n; h),$$

que aplicado al (PVI): $Y'(t) = \lambda Y(t)$ con $Y(0) = 1$, satisface:

$$y_{n+1} = R(\lambda h) y_n.$$

Tomando $z = \lambda h$, $R(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ es la función de estabilidad o de amplitud

Definición

Un método numérico de un paso su región de estabilidad (lineal o absoluta) $\mathcal{D}$ está asociada a su función de estabilidad tal que

$$\mathcal{D} = \{z = \lambda h \in \mathbb{C} \ : |R(z)| < 1\}.$$

¿Cuáles son las funciones de estabilidad de los métodos de Euler, Euler implícito, trapecio,...?

A-estabilidad

Definición

Un método numérico (MN) es **A-estable** (absolutamente estable) si:

$$\mathbb{C}_- \subset \mathcal{D}_{MN}$$

Observación: Si un método es A-estable, la condición de de estabilidad se satisface y solo nos tenemos que preocupar de identificar h que cumpla nuestra condición de precisión.

- Euler explícito no es A-estable
- Euler implícito es A-estable
- Trapecio es A-estable.