Lógica de predicados

Lectura:

- Capítulo 1 de Rosen

Lecturas adicionales:

- Capítulos 8, 9 de Russell + Norvig
- Capítulos 15,16 de Nilsson

Bibliografía:

- E. Paniagua Arís, J. L. Sánchez González, F. Martín Rubio, "Lógica computacional", Thomson

- Melvin Fitting "First-order logic and automated theorem proving", Springer-Verlag (New-York 1990)

Lógicas de orden superior

- La lógica proposicional no es suficientemente potente para expresar ciertos tipos de conocimiento.
- Necesitamos un lenguaje para
  - » realizar una descripción concisa de entornos en los que hay muchos objetos.
  - » Formular aserciones generales sobre todos los objetos en un determinado entorno, sobre las relaciones que hay entre ellos, sobre la existencia de objetos que tienen ciertas propiedades, o que están relacionados de alguna forma, etc.
- Tipos de lógica
  - » **Lógica proposicional** o **lógica de orden cero**

    Átomos, conectores.
  - » **Lógica de predicados** o **lógica de primer orden (LPO)**

    ++ objetos, funciones, predicados, variables que hacen referencia a objetos, cuantificadores sobre estas variables

    ej. $(\forall x)\ Humano(x) \Rightarrow Mortal(x)$
  - » **Lógica de segundo orden**:

    ++ variables que hacen referencia a predicados

    ej. $(\exists P)\ [P(A) \wedge P(B)]$

    $(\forall x)(\forall y)\ [(x=y) \Leftrightarrow (\forall P)(P(x) \Leftrightarrow P(y))]$

    [principio de ***Leibniz***, 1666]
  - » **Lógicas de orden superior …**
  - » **Teoría de tipos.**

Lógica de primer orden

Ejemplo: Familia + amigos

- **Ontología**
  - » **Conectores, variables, cuantificadores**
  - » **Constantes**

    Objetos constantes: Pedro, Pablo, María

    Funciones: $madreDe^1$, $padreDe^1$, $mejorAmigoDe^1$

    Predicados: $Casado^1$, $Feliz^1$, $Madre^2$, $Padre^2$, $Tía^2$, $Tío^2$, $Hija^2$, $Hijo^2$, $Hermana^2$, $Hermano^2$,…
- **Definición**: "El tío de alguien es el hermano de su padre o de su madre"

  $\forall x\ \forall y\ [Tío(x,y) \Leftrightarrow \exists z\ (Hermano(x,z) \wedge (Padre(z,y) \vee Madre(z,y)))]$
- **Afirmaciones generales**:

  "Todos los hijos (varones) de María están casados, pero son infelices"

  $\forall x\ [Hijo(x,María) \Rightarrow (Casado(x) \wedge \neg Feliz(x))]$
- **Afirmaciones sobre existencia**: "Algunas de las hijas del mejor amigo de Pedro son madres"

  $\exists x\ \exists y\ [Hija(x,mejorAmigoDe(Pedro)) \wedge Madre(x,y)]$

Lenguaje, I

- **Constantes**:

  » **Objetos simbólicos** (en general, en mayúsculas)

  `Ej. P,Q, Juan, PuertaDeAlcalá`

  » **Funciones** (en general, en minúsculas)

  Argumentos de entrada: lista de términos entre paréntesis.

  Evalúa a: un término.

  Ej. $\mathtt{padreDe}^{1}$, $\mathtt{distanciaEntre}^{2}$

  » **Relaciones o predicados** (en gral. en mayúsculas)

  Argumentos de entrada: lista de términos entre paréntesis.

  Evalúa a: un valor de verdad (“Verdadero” o “Falso”).

  Ej. $\mathtt{Padre}^{2}$, $\mathtt{Blanco}^{1}$, $\mathtt{Triunvirato}^{3}$

  Las relaciones unarias se denominan propiedades

Notas:

» El superíndice denota la aridad de la función o del predicado (es decir, el número de argumentos)

» Los objetos simbólicos pueden ser considerados como funciones de aridad 0.

Lenguaje, II

- **Signos de puntuación**
  - » **Coma: ,**
  - » **Paréntesis:** ( ) [ ] { }

- **Conectores de la lógica proposicional**:
  $\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (en orden de precedencia)

- **Variables** (en general, en minúsculas)

  El conjunto de valores que puede tomar una variable es su dominio
  ej. x (reales), n (enteros), p (personas), etc.

  `Ej. x,y,p,q,…, p1,p2,…`

- **Cuantificadores**
  - » **Cuantificador universal (∀)**
  - » **Cuantificador existencial (∃)**

  Se usan para cuantificar variables.

Ámbito de `y`

$$(\forall x)\ \boxed{\{P(x) \Rightarrow (\exists y)\ \boxed{[R(x,y) \ \Rightarrow \ S(f(x))]}\}}$$

Ámbito de `x`

Término, átomo, literal, cláusula, FNC

- **Un término es una referencia a un objeto:**
  - **Una referencia directa al objeto (constante)**

    `Ej.    Pedro, P, P1,…`

  - Una **variable**

    `Ej.    x,y`

  - La evaluación de una **función: El nombre de la función** de aridad n, seguido de **n términos** separados por comas y entre paréntesis.

    `Ej.    padreDe(x), distanciaEntre(A,B)`

- **Una fórmula atómica (átomo)** es la evaluación de un **predicado: El nombre el predicado** de aridad n, seguido por **n términos** separados por comas y entre paréntesis. Es la unidad mínima que **tiene un valor de verdad** (“Verdadero” o “Falso”) en lógica de predicados.

    `Ej.    Padre(x,Pedro)`

- **Un literal** puede ser:
  - Un **literal positivo**: Una fórmula atómica

    `Ej.    Hermano(x,Pedro)`

  - A **literal negativo**: La negación de un literal positivo (negación de una fórmula atómica).

    `Ej.    ¬ Padre(Juan,padreDe(Pedro))`

- **Una cláusula es una disyunción de literales**
- **Una FBF en forma normal conjuntiva (FNC) es una conjunción de cláusulas.**

Fórmulas bien formadas

- Una **FBF** se construye utilizando átomos y conectores del mismo modo que en lógica proposicional.
- Si `w` es una FBF y `x` es una variable, las siguientes expresiones son también FBFs
  - » $(\forall x)\ w$
  - » $(\exists x)\ w$

  En general (pero no siempre), la variable `x` forma parte de `w`. Para indicar que `x` forma parte de `w`, se suele escribir `w(x)`
- **FBF cerrada**: Aquella en la que todas las variables están cuantificadas.
  - » $(\forall x)\ [P(x) \Rightarrow R(x)]$
  - » $(\exists x)\ [P(x) \Rightarrow (\exists y)(R(x,y) \Rightarrow S(f(x)))]$

Nota: El **orden** en que aparecen $\forall, \exists$ en la FBF es **importante**

$x, y \in \{personas\}$

`Padre(x,y)` "x es el padre de y" (relación binaria)

$(\forall x)(\forall y)\,Padre(x,y)$	"Todos son padres de todos"
$(\exists x)(\exists y)\,Padre(x,y)$	"Existe alguien que tiene al menos un padre"
$(\forall x)(\exists y)\,Padre(x,y)$	"Todos son padres de alguien"
$(\exists y)(\forall x)\,Padre(x,y)$	"Hay alguien que tiene a todos como padres"
$(\exists x)(\forall y)\,Padre(x,y)$	"Hay alguien que es padre de todos"
$(\forall y)(\exists x)\,Padre(x,y)$	"Todo el mundo tiene un padre"

Interpretación y semántica

- **Constantes**
  - » **Las constantes que son objetos simbólicos** corresponden a entities en **el mundo real**.
  - » **Los predicados de aridad 1** corresponden a propiedades de los **objetos**.
  - » **Los predicados de aridad n > 1** expresan **relaciones entre objetos**.

- **Variables**
  - » El **dominio** de una variable es el rango de valores entre los objetos simbólicos que puede tomar dicha variable.
  - » **Asignación**: Operación mediante la cual una variable que aparece en una FBF es reemplazada por un valor particular dentro de su dominio.
- **Cuantificadores**
  - » **Cuantificador universal**: `(∀x)w(x)` tiene valor "`Verdadero`" ssi `w(x)` tiene valor "`Verdadero`" para todas las posibles asignaciones de `x`.
  - » **Cuantificador existencial**: `(∃x)w(x)` tiene valor "`Verdadero`" ssi `w(x)` tiene valor "`Verdadero`" para alguna de las posibles asignaciones de `x`.

Reglas de equivalencia y reglas de inferencia

- **Reglas de equivalencia**
  - » **Reglas de equivalencia de la lógica proposicional**.
  - » **Renombrar variables**. El nuevo símbolo tiene que ser distinto de los símbolos utilizados para las otras variables que forman parte de la FBF.
    - $(\forall x)\ w(x) \equiv (\forall y)\ w(y)$
    - $(\exists x)\ w(x) \equiv (\exists y)\ w(y)$
  - » $\neg(\forall x)\ w(x) \equiv (\exists x)\ \neg w(x)$
  - » $\neg(\exists x)\ w(x) \equiv (\forall x)\ \neg w(x)$

- **Reglas de inferencia**
  - » **Reglas de inferencia de la lógica proposicional**.
  - » **Instanciación del universal** (IU) [Correcta]

    $(\forall x)\ w(x)\ \vdash_{IU}\ w(A)$, donde A es alguno de los valores en el dominio de x.
  - » **Generalización del existential** (GE) [Correcta]

    $w(A)\ \vdash_{GE}\ (\exists x)\ w(x)$, donde x es el símbolo de una variable cuyo dominio incluye a A.

Skolemización

Un **cuantificador existencial** puede ser eliminado de una FBF **reemplazando en** cada uno de los lugares en los que aparece la variable cuantificada por

» un **objeto de Skolem (constante),** si no hay variables cuantificadas de manera universal cuyo ámbito abarque el ámbito de la variable a eliminar.

Ej. $(\exists x)\, w(x)$

forma de Skolem: $w(SK)$

SK es un objeto cuya identidad desconocemos, pero que sabemos que existe.

» Una **función de Skolem** cuyos argumentos son las variables cuantificadas de manera universal cuyo ámbito abarque el ámbito de la variable a eliminar.

Ejemplo:

"Todas las personas tienen una altura"

$(\forall p)[(\exists h)\, Altura(p,h)]$

dominio de p: Personas.

dominio de h: Reales positivos.

Forma de Skolem: $(\forall p)\, Altura(p,h(p))$

$h(p)$ es una función de Skolem (desconocida, pero que sabemos que existe): Toma como argumento una ref. a una persona y devuelve su altura.

Ejemplos de Skolemización

$x, y \in \{personas\}$

$Padre(x,y)$ “x es el padre de y” (relación binaria)

$(\forall x)(\forall y) Padre(x,y)$ “Todos son padres de todos”

$(\exists x)(\exists y) Padre(x,y) \vdash_{SK} Padre(SK_1, SK_2)$

“Existe alguien que tiene al menos un padre”

$(\forall x)(\exists y) Padre(x,y) \vdash_{SK} (\forall x)\ Padre(x, h(x))$

“Todos son padres de alguien”

$(\exists y)(\forall x)\ Padre(x,y) \vdash_{SK} (\forall x)\ Padre(x, SK_3)$

“Hay alguien que tiene a todos como padres”

$(\exists x)(\forall y) Padre(x,y) \vdash_{SK} (\forall y)\ Padre(SK_4, y)$

“Hay alguien que es padre de todos”

$(\forall y)(\exists x) Padre(x,y) \vdash_{SK} (\forall y)\ Padre(p(y), y)$

“Todo el mundo tiene un padre”

Metateoremas para formas de Skolem

- Metateorema SK1: La forma de Skolem de una FBF NO es equivalente a la FBF original

  $w(SK) \models (\exists x)\ w(x)$ PERO $(\exists x)\ w(x) \not\models w(SK)$

	w(A)	w(B)		(∃x) w(x) x∈{A,B}		w(SK) Si SK fuera A	w(SK) Si SK fuera B
I_2	V	V		V		V	V
I_2	V	F		V		V	F
I_3	F	V		V		F	V
I_4	F	F		F		F	F

  Ej. $P(A) \lor P(B) \models (\exists x)\ P(x)$

  PERO $P(A) \lor P(B) \not\models P(SK)$

- Metateorema SK2 (Loveland, 1978):

  La forma de Skolem de un conjunto de FBFs es satisfacible exactamente en aquellos casos en los que el conjunto de FBFs original es satisfacible.
  - » Un conjunto de FBFs es satisfacible si su forma de Skolem es satisfacible.
  - » Un conjunto de FBFs es insatisfacible si su forma de Skolem es insatisfacible.

FNC en lógica de primer orden

1. **Eliminar las implicaciones y dobles implicaciones** $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$
2. **Reducir el ámbito de la negación** $\neg$
   » Leyes de De Morgan

   $\neg(w1 \vee w2) \equiv \neg w1 \wedge \neg w2$

   $\neg(w1 \wedge w2) \equiv \neg w1 \vee \neg w2$

   » Eliminación de negación doble $(\neg\neg w \equiv w)$

   » Combinación de $\neg$ con cuantificadores

   $\neg(\forall x)\ w(x) \equiv (\exists x)\ \neg w(x)$

   $\neg(\exists x)\ w(x) \equiv (\forall x)\ \neg w(x)$
3. **Estandarizar las variables**: Renombrar variables, de forma que variables distintas tengan asociadas símbolos distintos

   $[(\forall x)\ [P(x) \Rightarrow R(x)]] \vee [(\exists x)\ P(x)]$

   $\equiv [(\forall x)\ [P(x) \Rightarrow R(x)]] \vee [(\exists y)\ P(y)]$
4. **Skolemización**: Eliminar los cuantificadores existenciales reemplazando las variables correspondientes por objetos de Skolem o funciones de Skolem.
5. **Convertir a formato prénex** desplazando al principio de la FBF todos los cuantificadores universales.

   FBF en forma **prénex** = **Prefijo** (lista de cuantificadores)
   \+ **Matriz** (fórmula sin cuantificadores)
6. **Eliminar los cuantificadores al comienzo de la FBF**.
7. **Utilizar leyes distributivas y otras leyes de equivalencia** de la lógica proposicional para transformar la **matriz a FNC**.

Ejemplo 1: Conversión a CNF

$[(\forall x)\ Q(x)] \Rightarrow$
$(\forall x)(\forall y)\ [(\exists z)\ [P(x,y,z) \Rightarrow (\forall u)\ R(x,y,u,z)]$

1. Eliminar las implicaciones $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$

$\neg[(\forall x)\ Q(x)] \vee$
$(\forall x)(\forall y)\ [(\exists z)\ [\neg P(x,y,z) \vee (\forall u)\ R(x,y,u,z)]$

2. Reducir el ámbito de la negación

$[(\exists x)\ \neg Q(x)] \vee$
$(\forall x)(\forall y)\ [(\exists z)\ [\neg P(x,y,z) \vee (\forall u)\ R(x,y,u,z)]$

3. Estandarizar variables

$[(\exists w)\ \neg Q(w)] \vee$
$(\forall x)(\forall y)\ [(\exists z)\ [\neg P(x,y,z) \vee (\forall u)\ R(x,y,u,z)]$

4. Skolemización:

$\neg Q(A) \vee (\forall x,y)[\neg P(x,y,f(x,y)) \vee (\forall u) R(x,y,u,f(x,y))]$

5. Formato prénex:

$(\forall x,y,u)[\neg Q(A) \vee \neg P(x,y,f(x,y)) \vee R(x,y,u,f(x,y))]$

6. Eliminar los cuantificadores universales

$\neg Q(A) \vee \neg P(x,y,f(x,y)) \vee R(x,y,u,f(x,y))$

7. Convertir a FNC: La FBF está ya en FNC.

Ejemplo 2: Conversión a CNF

"Everybody who loves all animals is loved by someone"

"Todos los que aman a todos los animales son amados por alguien"

$$(\forall x)[(\forall y)\{Animal(y) \Rightarrow Loves(x,y)\} \Rightarrow (\exists y)\ Loves(y,x)]$$

1. Eliminar las implicaciones $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$

$$(\forall x)[\neg(\forall y)\{\neg Animal(y) \vee Loves(x,y)\} \vee (\exists y)\ Loves(y,x)]$$

2. Reducir el ámbito de la negación

$$(\forall x)[(\exists y)\{Animal(y) \wedge \neg Loves(x,y)\} \vee (\exists y)\ Loves(y,x)]$$

3. Estandarizar variables

$$(\forall x)[(\exists y)\{Animal(y) \wedge \neg Loves(x,y)\} \vee (\exists z) Loves(z,x)]$$

4. Skolemización:

$$(\forall x)[\{Animal(f(x)) \wedge \neg Loves(x,f(x))\} \vee Loves(g(x),x)]$$

5. Formato prénex: la FBF está en forma prénex

6. Eliminar los cuantificadores universales

$$\{Animal(f(x)) \wedge \neg Loves(x,f(x))\} \vee Loves(g(x),x)$$

7. Convertir a FNC utilizando leyes distributivas y otras leyes de equivalencia :

$$\{Animal(f(x)) \vee Loves(g(x),x)\} \wedge \{\neg Loves(x,f(x))\} \vee Loves(g(x),x)\}$$

Resolución +refutación en LPO

Consideremos el conjunto de FBFs Δ y la FBF `w`

¿Es `w` consecuencia lógica de Δ ?

¿$\Delta \models$ `w` ?

1. Incluye la negación de la meta: $\alpha = \{\Delta \wedge \neg w\}$
2. Convierte a FNC
3. Aplica resolución (posiblemente sean necesarias instanciaciones de variables para ésto)
   (i) Si se deriva la cláusula vacía mediante resolución (α es UNSAT) entonces $\Delta \models w$
   (ii) Si no se deriva la cláusula vacía mediante resolución (α es SAT), entonces $\Delta \not\models w$

» Si $\Delta \models w$, el algoritmo para y responde “SI”.
» Si $\Delta \not\models w$, el algoritmo podría
  – parar y responder “NO” (correcto)
  – No parar nunca.

Resolución es **correcta**, **completa en pruebas por refutación,** pero **semidecidible**.

Trucos

Cuando traducimos de lenguaje natural a FBFs en lógica de predicados, normalmente

$$(\forall x) \quad [w1(x) \Rightarrow w2(x)]$$

$$(\exists x) \quad [w1(x) \wedge w2(x)]$$

Ej. "Todos los que están en la UAM son inteligentes"

$$(\forall x) \quad [En(x,UAM) \Rightarrow Inteligente(x)]$$

"Hay gente en la UAM que es inteligente"

$$(\exists x) \quad [En(x,UAM) \wedge Inteligente(x)]$$

ERRORES COMUNES

$$(\exists x) \quad [En(x,UAM) \Rightarrow Inteligente(x)]$$

[DEMASIADO GENERAL]

"Hay alguien que o es inteligente o no está en la UAM"

$$(\forall x) \quad [En(x,UAM) \wedge Inteligente(x)]$$

[DEMASIADO ESPECÍFICO]

"Todo el mundo está en la UAM y es inteligente"

Sería preferible restringir el dominio de x a personas inteligentes que están en la UAM.

Did curiosity kill the cat?

- Everyone who loves all animals is loved by someone.
- Anyone who kills an animal is loved by no one.
- Jack loves all animals.
- Jack or Curiosity killed the cat, who is named Tuna.
- Did Curiosity kill the cat?

Did curiosity kill the cat?

- Everyone who loves all animals is loved by someone.
  $(\forall x)[(\forall y)[Animal(y) \Rightarrow Loves(x,y)] \Rightarrow (\exists z)\ Loves(z,x)]$

- Anyone who kills an animal is loved by no one.
  $(\forall x)[(\exists y)(Animal(y) \wedge Kills(x,y)) \Rightarrow (\forall z)\ \neg Loves(z,x)]$

- Jack loves all animals.
  $(\forall x)\ [Animal(x) \Rightarrow Loves(Jack,x)]$

- Jack or Curiosity killed the cat, who is named Tuna.
  $Kills(Jack,Tuna) \vee Kills(Curiosity,Tuna)$
  $Cat(Tuna)$

- A cat is an animal
  $(\forall x)\ Cat(x) \Rightarrow Animal(x)$

- Did Curiosity kill the cat?
  Kills(Curiosity,Tuna) ???

Did curiosity kill the cat?

A. `Animal(F(x)) ∨ Loves(G(x),x)`

B. `¬Loves(u,F(u)) ∨ Loves(G(u),u)`

C. `¬Animal(y) ∨ ¬Kills(x,y) ∨ ¬Loves(z,x)`

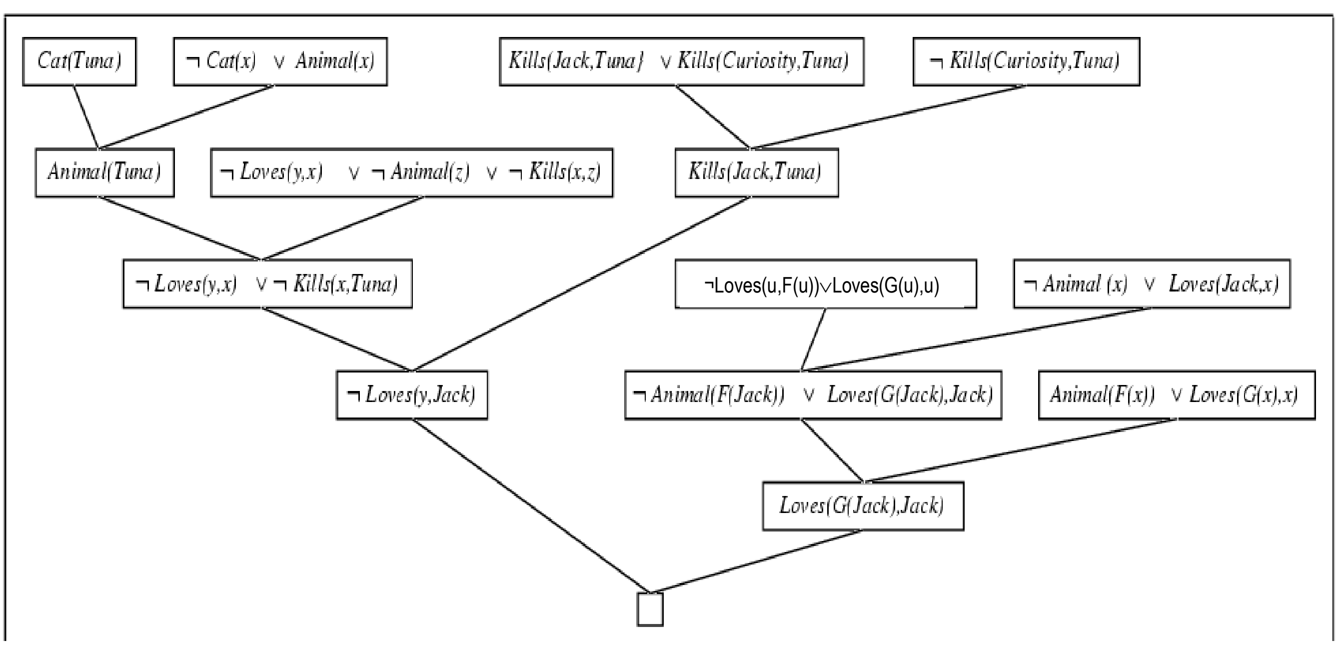
D. `¬Animal(x) ∨ Loves(Jack,x)`

E. `Kills(Jack,Tuna) ∨ Kills(Curiosity,Tuna)`

F. `Cat(Tuna)`

G. `¬Cat(x) ∨ Animal(x)`

H. `¬Kills(Curiosity,Tuna)`



Nota: En este ejemplo, las variables que está en cláusulas distintas son distintas, incluso si se utiliza el mismo símbolo para referirse a ellas.

Ontología para conjuntos

- **Ontología** para una **teoría de conjuntos**

  Vocabulario de objetos, predicados y funciones necesarios para caracterizar los conjuntos
  - » Objetos constantes:
    - – El conjunto vacío: `{}`
    - – Elementos de un conjunto: `A, B, C,...`
  - » Predicados: $\texttt{Conjunto}^1$, $\texttt{PerteneceA}^2(\in)$, $\texttt{Subconjunto}^2(\subset)$, $\texttt{Igual}^2(=)$
  - » Funciones: $\texttt{insertar}^2(\{|\})$, $\texttt{unión}^2(\cup)$, $\texttt{intersección}^2(\cap)$
- **Axiomas** para una teoría de conjuntos:

1. $\forall s[\text{Conjunto}(s) \Leftrightarrow$
   $(s=\{\}) \vee (\exists x,s')[\text{Conjunto}(s') \wedge (s=\{x|s'\})]]$

   [A partir de ahora, el dominio de las variables que comienzan con s es el conjunto de conjuntos]
2. $\neg(\exists x,s)[\{x|s\}=\{\}]$
3. $(\forall x,s)[x\in s \Leftrightarrow s=\{x|s\}]$
4. $(\forall x,s)[x\in s \Leftrightarrow (\exists y,s')[s=\{y|s'\} \wedge (x=y \vee x\in s')]]$
5. $(\forall s_1,s_2)[s_1\subset s_2 \Leftrightarrow (\forall x)[x\in s_1 \Rightarrow x\in s_2]]$
6. $(\forall s_1,s_2)[s_1=s_2 \Leftrightarrow (s_1\subset s_2 \wedge s_2\subset s_1)]$
7. $(\forall x,s_1,s_2)[x\in(s_1 \cap s_2) \Leftrightarrow (x\in s_1 \wedge x\in s_2)]$
8. $(\forall x,s_1,s_2)[x\in(s_1 \cup s_2) \Leftrightarrow (x\in s_1 \vee x\in s_2)]$

Números naturales

[http://mathworld.wolfram.com/NaturalNumber.html]

The term "natural number" refers either to a member of the set of positive integers 1, 2, 3, ... (Sloane's A000027) or to the set of nonnegative integers 0, 1, 2, 3, ... (Sloane's A001477; e.g., Bourbaki 1968, Halmos 1974).

Regrettably, there seems to be no general agreement about whether to include 0 in the set of natural numbers.

In fact, Ribenboim (1996) states "Let P be a set of natural numbers; whenever convenient, it may be assumed that $0 \in P$."

Nota:

En lógica, teoría de conjuntos e informática, la convención más habitual (ya que es la más conveniente para los desarrollos que se realizan) es que los números naturales incluyan al cero.

Los matemáticos que se dedican a teoría de números prefieren excluir al cero de entre los naturales.

Números naturales

- Ontología para los números naturales
  - » Objeto constante: `0`
  - » Predicados
    - – Predicado para determinar si un objeto es un número natural: $\texttt{NumNat}^1$
    - – Igualdad: $\texttt{Igual}^2$ (=)
  - » Funciones
    - – Sucesor: $\texttt{suc}^1$
    - – Suma: $\texttt{sum}^2$ (+)
- Axiomas de Peano

```
NatNum(0)
(∀n)[NatNum(n) ⇒ NatNum(suc(n))]
[A partir de ahora, el dominio de las variables es los
  números naturales, incluyendo el cero]
(∀n)[0≠suc(n)]
(∀m,n)[m≠n ⇒ suc(m)≠suc(n)]
(∀n) [sum(n,0)=n]
(∀m,n)[sum(suc(m),n)=suc(sum(m,n))]
```

Nota: El principio de **inducción** sólo puede ser formulado en **lógica de segundo orden**, en la que las relaciones y las funciones de la lógica de primer orden pueden ser utilizadas como argumentos de aserciones.

(ej. Se puede escribir un predicado de segundo orden que especifica si una relación de primer orden es transitiva)