Tema 5: Relaciones de recurrencia

1. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, con $n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$.

b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, con $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$.

c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, con $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 1$.

d) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$, con $n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = 8$.

e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con $n \geq 3, a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.

f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, con $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$.

g) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, con $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = -6$.

Solución:

a) $a_n = (3 - n)\cdot 2^{n+1}$

b) $a_n = -5^n + 3\cdot 2^n$

c) $a_n = 4 - 3n$

d) $a_n = 3 - (-5)^n$

e) $a_n = 1 - 2^n + 2\cdot 3^n$

f) $a_n = -2 \cdot 3^n + 3\cdot 2^n$

g) $a_n = (1 + n)\,(-3)^n$

2. Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0, 1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

Solución:

$$\begin{cases} a_1 = 2, \; a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Fórmula explícita:

$$a_n = \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3. Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones, si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

Solución:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \; a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Fórmula explícita:

$$a_n = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

4. Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes en un mismo punto. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el número de regiones infinitas.

   a) Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

   b) Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

Solución:

a) La recurrencia es

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = a_{n-1} + n. \end{cases}$$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A$.

Solución particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\, n$

Solución general de la completa: $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\, n + A$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}\, n + 1$

b) La recurrencia es

$$\begin{cases} b_1 = 2, \\ b_n = b_{n-1} + 2 \end{cases}$$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A$

Solución particular de la completa: $P(n) = 2n$

Solución general de la completa: $a_n = 2n + A$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = 2n$

5. Problema de las Torres de Hanoi (Ëdouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, y resuélvela.

Solución:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n$
Solución particular de la completa: $P\,(n) = -1$
Solución general de la completa: $a_n = -1 + A \cdot 2^n$
Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = -1 + 2^n$

6. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

   a) $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} a_0 = 7, \\ a_n = a_{n-1} + 3n^2. \end{cases}$

   c) $\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5. \end{cases}$

   d) $\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5. \end{cases}$

   e) $\begin{cases} a_0 = 11,\; a_1 = 1,\; a_2 = -1, \\ a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2. \end{cases}$

   f) $\begin{cases} a_0 = 1,\; a_1 = 3, \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n. \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 0, \\ a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_1 = 2, \ a_2 = 3, \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} a_0 = 2, \ a_1 = 4, \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1. \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = C$

Solución particular de la completa: $P(n) = n^2$

Solución general de la completa: $a_n = n^2 + C$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = n^2$

b) $\begin{cases} a_0 = 7, \\ a_n = a_{n-1} + 3n^2. \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = C$

Solución particular de la completa: $P(n) = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\,n$

Solución general de la completa: $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\,n + C$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\,n + 7$

c) $\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5. \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 3^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = \frac{35}{4} \cdot 7^n$

Solución general de la completa: $a_n = \frac{35}{4} \cdot 7^n + A \cdot 3^n$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = \frac{35}{4} \cdot 7^n - \frac{27}{4} \cdot 3^n = \frac{35}{4} \cdot (7^n - 3^n)$

d) $\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5. \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 3^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = 5 \cdot n \cdot 3^n$

Solución general de la completa: $a_n = 5 \cdot n \cdot 3^n + A \cdot 3^n$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = 5 \cdot n \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = (5n + 2) \cdot 3^n$

e) $\begin{cases} a_0 = 11, \ a_1 = 1, \ a_2 = -1, \\ a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2. \end{cases}$

Sol. Ec. homogén: $S(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12$

Solución general de la completa: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12 + \ A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n$

Sol. Final con las cond. Inicial. : $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{9}{2} \cdot n + 12 - 5 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + 4 \cdot (-1)^n$

f) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 3, \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n. \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = n + 4$

Solución general de la completa: $a_n = n + 4 + A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = n + 4 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n = n + 4 + (-3 + 2n) \cdot 2^n$

g) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 0, \\ a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$

Solución particular de la completa: $P(n) = -n \cdot 4^{n+1}$

Solución general de la completa: $a_n = -n \cdot 4^{n+1} + A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = -n \cdot 4^{n+1} + \frac{17}{5} \cdot 4^n - \frac{12}{5} \cdot (-1)^n$

h) $\begin{cases} a_1 = 2, \ a_2 = 3, \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1 \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A + Bn$

Solución particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

Solución general de la completa: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + A + Bn$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + 2 - \frac{1}{2} \cdot n$

i) $\begin{cases} a_0 = 2, \ a_1 = 4, \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5 \cdot 2^n \end{cases}$

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n + B$

Solución particular de la completa: $P(n) = 10 \cdot n \cdot 2^n$

Solución general de la completa: $a_n = 10 \cdot n \cdot 2^n + A \cdot 2^n + B$

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = 10 \cdot n \cdot 2^n - 18 \cdot 2^n + 20$

7. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el conjunto de sucesiones de longitud n, formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de A-es son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

SOLUCIÓN: La relación de recurrencia es

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = 5, \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}. \end{cases}$$

Su expresión general es

$$a_n = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

8. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar cuántas son las banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.

b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.

c) Sea a_n el número de banderas que se pueden formar con n franjas horizontales, con los cuatro colores dados y tales que dos franjas adyacentes no sean del mismo color ni tampoco sean del mismo color la primera y la última franja. Hallar una relación de recurrencia para a_n. (Indicación: Hacer $n = 4$ y generalizar para n, con $a_1 = 0$.)

d) Resolver la ecuación de recurrencia obtenida en el apartado anterior

SOLUCIÓN:

a) 4^n

b) $4 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{n-1}$

c) $\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 12, \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}. \end{cases}$

d) $a_n = 3^n + 3(-1)^n$.

9. Halla, mediante una relación de recurrencia, la suma $a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$, en función de n.

SOLUCIÓN:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 2^n = a_{n-1} + 2^n$$

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_n = a_{n-1} + 2^n \end{cases}$$

Ecuación homogénea: $S(n) = A$.
Solución particular de la completa: $P(n) = 2 \cdot 2^n$.
Solución general de la completa: $a_n = 2 \cdot 2^n + A$.
Solución final con condición inicial.: $a_n = 2^{n+1} - 1$.

10. Hallar una relación de recurrencia para el número de listas a_n de longitud n formadas con los elementos 0, 1 y 2, en las que el elemento 1 no aparece nunca en el lugar posterior a un 2.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_2 = 8, \\ a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}. \end{cases}$$

11. Sea

$$g(n) = \binom{n}{k},$$

donde ambos números son naturales, $n \geq k$, y k fijo. Obtener una relación de recurrencia para calcular $g(n)$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} g(k) = \binom{k}{k} = 1, \\ g(n) = \frac{n}{n-k}\, g(n-1). \end{cases}$$

12. Sea

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

a) Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det A_n$

b) Resuelve la relación de recurrencia $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} + 1$, con las condiciones iniciales $D_1 = 2$, $D_2 = 3$.

SOLUCIÓN:

a) $\begin{cases} D_1 = 2, \\ D_2 = 3, \\ D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}. \end{cases}$

b) $D_n = 2 - \frac{1}{2}\, n + \frac{1}{2}\, n^2.$

13. Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1 cm, 2 cm y 4 cm, y se quiere construir una torre apilando cubos. Encuentra una relación de recurrencia para hallar el número de formas distintas T_n de construir una torre de altura n cm.

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} T_1 = 1,\ T_2 = 2,\ T_3 = 3,\ T_4 = 6, \\ T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + \ T_{n-4}. \end{cases}$$