ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS DE PRIMER ORDEN

1) Calcular la solución de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

a) $y_{n+1} = \frac{1}{n} y_n$, $y_1 = A$,

b) $y_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2} y_n$, $y_1 = A$,

c) $y_{n+1} = \frac{n+1}{n-1} y_n$, $y_2 = A$,

d) $y_{n+1} = (y_n)^3$, $y_0 = A$,

e) $y_{n+1} = \sqrt{(y_n)^2 + 3}$, $y_0 = A$.

f) $y_{n+1} = 3(y_n)^2$, $y_0 = A$.

Solución: a) $y_n = \frac{A}{(n-1)!}$, b) $y_n = \frac{2^{n-1}}{(n!)^2} A$, c) $y_n = \frac{n!}{(n-2)!} A$ d) $y_n = A^{3^n}$, e) $y_n = \sqrt{A + 3n}$, f) $y_n = 3^{2^n - 1} A^{2^n}$.

2) Invertimos un dinero en un depósito bancario que paga intereses cada año (con interés compuesto).

a) Si invertimos 1000 euros y después de 5 años tenemos 1500 euros en el depósito, ¿cuál es el interes anual que nos está dando el banco?

b) Si el interés es del 5% anual, ¿cuantos años tendremos que esperar para tener más del doble del dinero inicial?

c) Si el interés es del 3% anual, y después de 5 años tenemos 2000 euros en el depósito, ¿cuánto dinero invertimos inicialmente?

Solución: a) $i = \left(\frac{1500}{1000}\right)^{1/5} - 1 \simeq 0.084 = 8.4\%$ b) Tiene que ser $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1.05)} \simeq 14.2$, y por tanto, a partir de 15 años. c) $\frac{2000}{1.03^5} \simeq 1725.22$ euros.

3) Calcular la solución general y la solución particular que cumple la condición inicial de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

a) $2y_{n+1} = y_n + 3$, con la condición inicial $y_2 = 5$.

Solución general: $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n A + 3$.

Solución: $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 8 + 3$.

b) $y_{n+1} = 2y_n + 3 \cdot 2^n$, con la condición inicial $y_1 = 1$.

Solución general: $y_n = 2^n A + \frac{3}{2} n \cdot 2^n$.

Solución: $y_n = -2^n + \frac{3}{2} n \cdot 2^n$.

c) $y_{n+1} = y_n + 3n$, con la condición inicial $y_2 = 7$.

Solución: $y_n = \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n + n - 3 + \frac{5}{4}2^n$.

4) Nos tocan 10 millones de euros en la loteria y decidimos vivir de las rentas de la siguiente forma: Ingresamos el dinero en un depósito bancario que da un interés anual del 10%, y al inicio de cada año sacamos un millón de euros para nuestros gastos de ese año.

a) Determinar el capital del depósito pasados n años.

b) ¿Cuántos años pasarán hasta que se nos termine el dinero?

c) ¿Cuántos millones deberían habernos tocado para que nunca se nos terminara el dinero?

Solución:

a) $y_n = -(1.1)^n + 11$. b) 25 años. c) 11 millones.

5) Pedimos un prestamo a un banco por un capital inicial C. Cada año el banco nos cobra un interés anual i y al final de cada año pagamos al banco una cantidad fija d. Se pide:

a) Demostrar que si y_n es el dinero que debemos al banco después de n años, se satisface la ecuación en diferencias $y_{n+1} = (1+i)y_n - d$.

b) Calcular el valor de y_n resolviendo la ecuación en diferencias.

c) Si pedimos un préstamo de $C = 10000$ euros, con un interés $i = 5\%$ y con $d = 1000$ euros, se pide:

c_1) determinar el dinero que debemos al banco después de 10 años.

c_2) ¿Cúantos años pasarán hasta que terminemos de pagar el préstamo? ¿cuánto pagaremos el último año?

d) Si $C = 10000$ euros, $i = 5\%$ y queremos terminar de pagar el préstamo en 10 años, calcular el valor de la cuota anual d. Cuando terminemos de pagar el préstamo, ¿cuánto dinero en total habremos pagado al banco?

Solución:

b) $y_n = (1+i)^n\left(C - \frac{d}{i}\right) + \frac{d}{i}$. c_1) $y_{10} = 3711$ euros, c_2) 15 años (el último año sólo tendríamos que pagar 210.7 euros para cancelar el préstamo). d) $d = 1295$ euros. Pagaremos en total $1295 \cdot 10 = 12950$.

6) (Modelo de la telaraña) Supongamos que la oferta O y la demanda D de un bien vienen dadas por las siguientes funciones del precio P del bien:

$$O(P) = aP + b$$
$$D(P) = -cP + d$$

con $a, b, c, d > 0$. Se supone el precio cambia cada año y que la oferta de

a) Demostrar que el precio sigue la ecuación recurrente $P_n = -\frac{a}{c}P_{n-1} + \frac{d-b}{c}$.

b) Calcular el precio de equilibrio P_E, es decir, la solución de la ecuación $O(P_E) = D(P_E)$.

c) Resolver la ecuación en diferencias del apartado a).

d) ¿Qué relación tienen que cumplir a y c para que el precio converja al precio de equilibrio P_E cuando $n \to \infty$?

Solución:

b) $P_E = \frac{d-b}{a+c}$, c) $P_n = \left(-\frac{a}{c}\right)^n A + \frac{d-b}{a+c}$, d) $a < c$.

7) Consideremos el siguiente algoritmo para ordenar n números $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

Comparamos el primer y segundo números, y los reordenamos en orden creciente. Después comparamos el segundo y el tercero y los reordenamos, después el tercero y el cuarto, y así hasta llegar al último. Tras este proceso sabemos que el número más alto está en el último lugar. Eliminamos el último número y repetimos el proceso con los $n-1$ números restantes. Si denotamos por c_n el número de comparaciones necesarias para ordenar n números mediante este método, demostrar que se cumple la ecuación recurrente $c_{n+1} = c_n + n$ con la condición inicial $c_1 = 0$. Determinar el valor de c_n resolviendo la ecuación.

Solución: $c_n = \frac{n^2-n}{2}$.