Semántica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA

enidos

- oducción
- rpretación de FBFs proposicionales
- dez
- sfacibilidad
- dez y Satisfacibilidad
- secuencia Lógica
- ivalencia Lógica

ucción a la Semántica (I)

es la semántica?

- udia el **significado de los símbolos**
  - Se introduce el concepto de interpretación (conjunto de reglas precisas que permiten asignar objetos de un dominio a ciertas expresiones de un lenguaje formal)
- gna un **significado a las construcciones sintácticas**
  - Junto con la sintáctica ayuda a definir un sistema formal
  - Sin significado todas las formulas proposicionales son sintácticamente diferentes unas de otras, excepto si son la misma cadena de símbolos
  - La introducción de la semántica a las fórmulas proposicionales consiste en reducir todas las situaciones posibles a dos: cierto o **verdadero** y **falso**
  - Aparece entonces una relación de **equivalencia entre fórmulas** que permite identificar fórmulas equivalentes

ucción a la Semántica (II)

ɔs visto (informalmente) qué es un **razonamiento o**:

npre que las premisas del razonamiento sean ciertas, esariamente la conclusión ha de serlo también

verdad de las premisas es incompatible con la falsedad de la clusión

onclusión es consecuencia lógica de las premisas

tivo del tema:

inir con precisión el concepto de **consecuencia lógica**

ucción a la Semántica (III)

- **proposición** es una condición/afirmación posible del
  do sobre el que queremos decir algo
  - proposición puede ser Verdadera o Falsa (**valor de verdad**)
- posiciones simples:
  - su valor de verdad no depende de otra proposición
- posiciones compuestas:
  - su valor de verdad depende del que tengan las proposiciones simples que la definan y
  - del significado de las conectivas

retación de FBFs proposicionales (I)

pretación: i(FBF proposicional) = V / F

- **función de interpretación (i)** (también llamada ación o interpretación) es un dispositivo formal asignar un valor de verdad a todas y cada una de las de un lenguaje proposicional
  - s un lenguaje proposicional, $i: FBF_{LP} \Rightarrow \{V, F\}$
- vez asignado el valor de verdad a las proposiciones es, las fórmulas compuestas (no atómicas) pueden ambién interpretadas:

$i(\neg A) = V$	sii	$i(A) = F$
$i(A \wedge B) = V$	sii	$i(A) = i(B) = V$
$i(A \vee B) = V$	sii	$i(A) = V$ o $i(B) = V$
$i(A \rightarrow B) = V$	sii	$i(A) = F$ o $i(B) = V$
$i(A \leftrightarrow B) = V$	sii	$i(A) = i(B)$

ndo A y B FBFs de un lenguaje proposicional

retación de FBFs proposicionales (II)

B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	V

cios (de semántica) (I)

: es menor de tres años, se va a la escuela infantil. Si enen tres años o más, se va al colegio o al trabajo. o se va a la escuela infantil, al colegio o al trabajo”

LP un lenguaje proposicional con los símbolos de proposición q, r, s} y las conectivas {¬, →, ∨}

nificado informal de las proposiciones:

- p: se es menor de tres años
- q: se va a la escuela infantil
- r: se va al colegio
- s: se va al trabajo

malización:

- Si se es menor de tres años, se va a la escuela infantil: $\mathbf{p \rightarrow q}$
- Si se tienen tres años o más, se va al colegio o al trabajo: $\mathbf{\neg p \rightarrow r \vee s}$
- Se va a la escuela infantil, al colegio o al trabajo: $\mathbf{q \vee r \vee s}$

cios (de semántica) (I)

lver:

gnación de significado a premisas y conclusión cuando

i(p) = i(q) = i(r) = i(s) = V

gnación de significado a premisas y conclusión cuando

i(p) = i(q) = i(r) = i(s) = F

cios (de semántica) (II)

ıar significado a las siguientes fórmulas cuando i(p) = V e i(r) = F

$\rightarrow q \vee r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg r)$

$\wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow r)$

ıar significado a las siguientes fórmulas para toda ble interpretación

$\vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$

$\vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

cios (de semántica) (III)

ar significado a las siguientes fórmulas para toda le interpretación

q	¬p v q	¬p ∧ q	¬p → q	¬p ↔ q	p v ¬p	p ∧ ¬p
V						
F						
V						
F						

cios (de semántica) (III)

ar significado a las siguientes fórmulas para toda
le interpretación

q	¬p v q	¬p ∧ q	¬p → q	¬p ↔ q	p v ¬p	p ∧ ¬p
V	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F
V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F

ez (I)

diendo a su semántica, las FBFs pueden clasificarse

tradicción sii no existe una interpretación i tal que i(A) = V

ida (o tautología) sii no existe una interpretación i tal que i(A) =
e representa ⊨ A)

tingente sii existe alguna interpretación i tal que i(A) = V y
te alguna interpretación i’ tal que i’(A) = F

bién se puede decir que

fórmula A es válida sii ¬A es una contradicción

fórmula A es contingente sii ¬A es contingente

ez (II)

radicción sii no existe una interpretación i tal que V

fórmulas que son falsas para cualquier posible asignación de ores de verdad de sus constituyentes, se denominan tradicciones

nplos:

¬	p
F	V
V	F

q	∧	¬	(p	∨	q)
V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F

(p	∧	q)	→	¬	q
V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F

ez (III)

a (o tautología) sii no existe una interpretación i tal i(A) = F (se representa ⊨ A)

fórmulas que son verdaderas para cualquier posible asignación valores de verdad de sus constituyentes, se denominan tologías

mplos

p
V
F

p	→	(q	→	p)
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	V	F	V	V
F	V	F	V	F

p	→	(¬	p	→	q)
V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F

ez (IV)

ingente sii existe alguna interpretación i tal que i(A)
 existe alguna interpretación i' tal que i'(A) = F

fórmulas que son verdaderas en algunas interpretaciones y
as en otras, se denominan contingencias

mplos

p
V
F

(p	∨	q)	→	q)
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	V	F	F	F
F	F	F	V	F

p	→	(p	→	¬	q)
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F

cios (de semántica)

ninar para cada una de las siguientes fórmulas si es válida, dictoria o contingente, indicando la(s) interpretación(es) que lo estran:

$p \wedge q \to p$

$p \vee q \to p$

$p \to \neg p$

$p \vee q \to (r \vee s \to p)$

$(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$

$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$(p \to \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \to (q \to \neg r)$

$(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$

$\neg(p \to q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$

$p \to (q \to r)$

$p \to (q \wedge \neg q \to \neg p)$

$(p \to q) \wedge (q \to p)$

$(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$

acibilidad

un lenguaje proposicional LP

- interpretación i **satisface** una fórmula A $\in$ FBF_{LP} sii i(A) = V
- fórmula A $\in$ FBF_{LP} es **satisfacible** sii existe (al menos) una rpretación i tal que i(A) = V
- fórmula A $\in$ FBF_{LP} es **insatisfacible** sii no existe ninguna rpretación i tal que i(A) = V
- a conjuntos de fórmulas {A1,…,An}, Ai $\in$ FBF_{LP} para todo i: $1 \leq i \leq n$:
  - Una interpretación i **satisface** {A1,…,An} sii i(Ai) = V para todo i: $1 \leq i \leq n$

ás

- interpretación que satisface una fórmula es un **modelo** de la mula
- interpretación que hace falsa una fórmula es un **contramodelo** a fórmula

ez y Satisfacibilidad

s definiciones anteriores se pueden establecer las entes equivalencias

- fórmula es **válida** sii
  - no tiene contramodelos sii
  - todas sus interpretaciones son modelos sii
  - todas sus interpretaciones la satisfacen
- fórmula es una **contradicción** sii
  - no tiene modelos sii
  - todas sus interpretaciones son contramodelos sii
  - es insatisfacible
- fórmula es **contingente** sii
  - tiene modelos y contramodelos

cios (I)

si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o
s (F).

fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al
nos un contramodelo de dicha fórmula A

Falsa. Una fórmula es contingente cuando puede ser verdadera o falsa, es decir, cuando tiene al menos un modelo y al menos un contramodelo

negación de una contradicción siempre será una tautología, y la
ación de una tautología será una contradicción

Verdadera

s satisfacible si y sólo si A no es una contradicción

Verdadera

s una tautología si y sólo si ¬A es contingente

Falsa

fórmula A es insatisfacible sí y sólo si es también contradicción

Verdadera. Para una fórmula insatisfacible y para una contradicción, todas las interpretaciones la hacen falsa

cios (II)

ostrar, mediante una interpretación, que la ente fórmula es satisfacible

$\underbrace{\to \neg p)}_{A} \wedge \underbrace{((q \vee r) \to (p \wedge s))}_{B}$

amos una interpretación que haga verdaderas A y B:

= V

i(s) = V y i(¬p) = V , por ejemplo i(s) = V i(p) = F

= i((q ∨ r) → (p ∧s)) = V

i(p) = F i(p ∧s) = F

i(q ∨ r) = F i(q) = i(r) = F

a interpretación, i(s) = V, i(p) = i(q) = i(r) = F, hace Verdadera la mula dada y, por tanto, **satisfacible**

cios (III)

ntrar, si existen, un modelo y un contramodelo para una de las siguientes fórmulas:

$\neg s \leftrightarrow (r \rightarrow \neg (s \wedge r))$

Modelo:

- i(p) = verdadero; i(r) = verdadero; i(s) = falso

Contramodelo:

- i(p) = falso; i(r) = verdadero; i(s) = falso

$p \vee q \rightarrow \neg p \wedge (p \leftrightarrow q))$

Modelo:

- i(p) = verdadero; i(q) = verdadero

Contramodelo:

- i(p) = falso; i(q) = falso

cios (IV)

s las siguientes fórmulas decir para cada una de si es válida, contingente, contradicción o no es le saber con certeza qué es, a partir de la mación disponible sobre A, B, C y D (donde A, B, C y fórmulas cualesquiera):

$\neg B$	sabiendo que B es insatisfacible
$B) \rightarrow (C \vee A)$	sabiendo que B es insatisfacible
$A \vee \neg B) \wedge (C \rightarrow \neg B)$	sabiendo que B es válida, A es insatisfacible
$\wedge [A \rightarrow (B \vee \neg A)]$	sabiendo que A es válida, B es insatisfacible

ecuencia Lógica (I)

un lenguaje proposicional LP, un conjunto de ulas {A1,…,An}, Ai $\in$ FBF_{LP} para todo i:1≤i≤n, y una ula B $\in$ FBF_{LP}

ecuencia lógica:

consecuencia lógica de {A1,…,An} (**[A1,…,An] ⊨ B**)

oda interpretación que satisface {A1,…,An} también satisface B

no existe ninguna interpretación que satisfaga {A1,…,An} y no sfaga a B

ecuencia Lógica (II)

mento correcto:

argumento con premisas {A1,…, An} y conclusión B es **correcto**
A1,…, An] ⊨ B

- En un argumento válido, la conclusión se sigue de las premisas
  - Esto ocurre cuando no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa

a decidirlo se pueden hacer dos análisis:

- (1) Ver si **todas** las interpretaciones que satisfacen {A1,…,An} también satisfacen B, o bien
- (2) Ver que **no existe ninguna** interpretación que satisfaga {A1,…,An} y no satisfaga B

aso (1) requiere examinar todas las interpretaciones posibles y si se cumple la condición

el caso (2) podemos centrarnos en definir una interpretación i tal i({A1,…, An}) = V y i(B) = F

- Si existe, esa interpretación es un contramodelo del argumento

ecuencia Lógica: Ejemplo (I)

zar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \} \vDash r$$

aciones posibles

i(q)	i(r)	i(q→ r)	i(p → (q→ r))	i(p ∧ q)	i((p → (q→ r)) ∧ (p ∧ q))
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

las interpretaciones posibles, sólo una hace verdad a las dos y esa interpretación también hace verdad a la conclusión. Por **ay relación de consecuencia lógica**

ecuencia Lógica: Ejemplo (II)

zar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

∧ ¬¬q, r } ⊨ q ∨ s

mos de definir un contramodelo del argumento:

∧ ¬¬q) = V sii

i(p) = V y

i(¬¬q) = V sii i(¬q) = F sii $\boxed{\text{i(q) = V}}$

= V

∨ s) = F sii

$\boxed{\text{i(q) = F}}$ y

i(s) = F

Hay contradicción

to que no es posible definir un contramodelo, el mento es correcto: **hay relación de consecuencia a** entre las premisas y la conclusión

ecuencia Lógica: Ejemplo (III)

lizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$\land$ q, ¬(p → r) } ⊨ q $\land$ (p → r)

amos de definir un contramodelo del argumento:

$\land$ q) = V sii

- i(p) = V y
- i(q) = V

(p → r)) = V sii i(p → r) = F

- i(p) = V y
- i(r) = F

$\land$ (p → r)) = F sii

- i(q) = F

bien

- i(p → r) = F sii
  - i(p) = V y
  - i(r) = F

Hay contradicción

Son compatibles

ecuencia Lógica: Ejemplo (III)

lizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$\wedge$ q, $\neg$(p $\to$ r) } $\models$ q $\wedge$ (p $\to$ r)

s posible definir un contramodelo del argumento: = i(q) = V, i(r) = F, por tanto el argumento no es ecto: **no hay relación de consecuencia lógica**

cios (I)

rminar si las siguientes argumentaciones son ctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo uestra (contramodelo)

- $p \rightarrow q] \vDash q$
- $, p \vee q] \vDash q$
- $\rightarrow q, \neg p] \vDash \neg q$
- $\rightarrow q, \neg q] \vDash \neg p$
- $\rightarrow q, \neg p] \vDash q$
- $\wedge q] \vDash p$
- $\wedge q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$
- $\vee q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$

cios (II)

si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa

las las fórmulas A1, A2, A3 y B, si existe una interpretación que sface tanto A1, A2 y A3, como B, podemos afirmar que B es secuencia lógica (|=) de A1, A2 y A3

Falsa. TODAS las interpretaciones que satisfagan A1, A2 y A3, tienen que satisfacer B (no es suficiente sólo con una), para que B sea consecuencia lógica de A1, A2 y A3

cios (III)

rminar si las siguientes argumentaciones son ctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo uestra (contramodelo)

1. $\{p \to q, p\} \models q$
2. $\{p \vee q\} \models q \vee p$
3. $\{p \wedge (q \vee r)\} \models p$
4. $\{p \vee q \to r\} \models q \to r$
5. $\{\neg\neg r \wedge \neg q\} \models \neg r$
6. $\{p \to (q \to r)\} \models q \to (p \to r)$
7. $\{\neg q \to r, t \to \neg q, \neg s \to \neg q\} \models t \vee \neg s \to r$
8. $\{p \vee (q \to r) \to q, p\} \models q$
9. $\{\neg p \to \neg s, \neg p \vee r, r \to \neg t\} \models \neg s \vee \neg t$
10. $\{(p \to q) \wedge t, (r \vee p) \wedge \neg q, \neg t \leftrightarrow \neg s\} \models r \wedge s$

cios (IV)

alizar el siguiente argumento, decidiendo si es o no
o (es decir, la conclusión es consecuencia lógica de
emisas):

lrea aprende Lógica si estudia y va a clase. Si Andrea no va a
e o no estudia, puede pasear por el campo. Si Andrea puede
ear por el campo no aprende Lógica. En consecuencia, Andrea
aprende Lógica.

cios (V)

alizar el siguiente razonamiento y demostrar con
dos semánticos si el razonamiento es o no correcto

- uan va a París o no se queda en casa. Si viaja en barco, no va a ís. Por consiguiente, si Juan se queda en casa, no viaja en barco

cios (VI)

alizar empleando las variables proposicionales adadas y analizar el siguiente argumento, rminando si hay o no hay relación de consecuencia:

e llueva (p) y haga sol (s) son condiciones necesarias para tener buena cosecha (c). Basta con que haga sol para que el turismo anime (t). O evitamos el calentamiento global (q) o no llueve. emos una buena cosecha. En conclusión, el turismo se anima y amos el calentamiento global

sible definir un contramodelo y por tanto

consecuencia lógica

hay consecuencia lógica

posible definir un contramodelo y por tanto

consecuencia lógica

hay consecuencia lógica

cios (VII)

alizar empleando las variables proposicionales adas y analizar el siguiente argumento, rminando si hay o no hay relación de consecuencia premisas y conclusión

no es cierto que se pueda ser rico (p) y dichoso (q) a la vez, onces o bien la vida está llena de frustraciones (r) o bien la vida merece vivirse (s). Se puede no ser dichoso y que la vida rezca vivirse. Por consiguiente, la vida está llena de frustraciones

sible definir un contramodelo y por tanto
consecuencia lógica
hay consecuencia lógica

posible definir un contramodelo y por tanto
consecuencia lógica
hay consecuencia lógica

cios (VIII)

alizar el siguiente razonamiento y analizar si es o no
cto:

ógico Ceferino le preguntaron: ¿amas a Queta, a Petra o a
ana?

ensó: los hechos son:

Amo al menos a una de las tres. Si amo a Petra pero no a Queta, entonces amo a Rosana. O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres. Si amo a Queta, entonces también amo a Petra

testó:

Amo a las tres

cios (IX)

ar

$\rightarrow$ u, q $\rightarrow$ u, r $\rightarrow$ u, s $\rightarrow$ u, t $\rightarrow$ u} $\vDash$ B, donde la fórmula B es:

$p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \rightarrow u$

$p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow u$

ar que la siguiente fórmula es tautología, de manera ntica pero sin utilizar tablas de verdad:

$\rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

cios (X)

ɔstrar con métodos semánticos si el razonamiento
ıo correcto

epostar en la gasolinera A, usando la tarjeta del seguro tengo 1
o de descuento; si voy a la gasolinera B y uso la tarjeta del banco
go 2 euros de descuento; voy a repostar en A o en B, pero no en
dos; por lo tanto voy a tener un descuento de 3 euros

cios (XI)

el siguiente argumento:

ndo Eduardo no juega al baloncesto, juega al tenis.

ndo juega al tenis, juega al fútbol.

juega al fútbol.

tanto, Eduardo juega al baloncesto.

alizar los cuatro enunciados y averiguar si ese namiento es o no válido

cios (XII)

rminar la corrección del siguiente argumento:

abe que

- Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos
- Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados
- Los ungulados de cuello largo son jirafas
- Los ungulados con rayas negras son cebras

bserva un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por siguiente, se concluye que el animal es una cebra

alencia Lógica (I)

órmulas A y B son **(lógicamente) equivalentes** (**A ↔ ≡ B**) sii para toda interpretación i se cumple que i(A)

definición implica que:

B son consecuencia lógica una de la otra (A ⊨ B y B ⊨ A)

órmula A ↔ B es válida (es una tautología)

jemplo: p → q ↔ ¬p v q

i(p)	i(q)	i(p → q)	i(¬p v q)	i((p → q) ↔ (¬p v q))
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

alencia Lógica (II)

quivalencia entre fórmulas proporciona numerosas ajas prácticas:

mite utilizar indistintamente las fórmulas equivalentes en una nostración (lo utilizaremos más adelante)

mite reducir el tamaño de un lenguaje proposicional (disminuir º de conectivas que emplea)

Por ejemplo, cualquier lenguaje proposicional puede reducirse a otro que sólo utiliza {¬, v}

Esta reducción simplifica tareas como:

- construcción de sistemas sintácticos de demostración
- demostración de las propiedades metalógicas del sistema formal

alencia Lógica (III)

nas equivalencias lógicas muy utilizadas (I):

$\neg p) \equiv p$	Doble negación
$p \equiv p$	Ley de idempotencia
$q \equiv q \wedge p$	Conmutatividad de la conjunción
$q \equiv q \vee p$	Conmutatividad de la disyunción
$(q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	Asociatividad de la conjunción
$(q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	Asociatividad de la disyunción
$q \equiv \neg p \vee q$	La implicación como disyunción
$\vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Ley de De Morgan
$\wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	Ley de De Morgan

alencia Lógica (III)

nas equivalencias lógicas muy utilizadas (II):

$(q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Distributividad de la conjunción respecto a la disyunción

$(q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción

$\rightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Definición de la doble implicación en función de la implicación

cios

los siguientes pares de fórmulas, ¿en cuáles se ple $A \models B$?, ¿en cuáles se cumple $B \models A$?, ¿en cuáles son equivalentes?

$p \wedge q$,	$B: p \vee q$
$p \rightarrow q$,	$B: q \rightarrow p$
$p \vee q \rightarrow r$,	$B: p \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \rightarrow r$,	$B: p \vee q \rightarrow r$
$p \rightarrow q$,	$B: p \leftrightarrow q$

Semántica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA