Lógica

BLOQUE 1: LÓGICA PROPOSICIONAL

Tema 2: Semántica Formal

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción.

❑ Estructura de la asignatura

Bloque 1
Lógica Proposicional

↓

Bloque 2
Lógica de Primer Orden

Lógica.

❑ Bloque I

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Tema 7
Conceptos metalógicos fundamentales de los sistemas formales proposicionales

Introducción a la semántica formal.

¿Qué es la semántica?

- Estudia el **significado de los símbolos**, por lo que se introduce el concepto de **interpretación** (*conjunto de reglas precisas que permiten asignar objetos de un dominio a ciertas expresiones de un lenguaje formal*).

- **Asigna un significado a las construcciones sintácticas**. Junto con la sintáctica ayuda a definir un **sistema formal**.

Introducción a la semántica formal.

❑ ¿Qué es la semántica?

- Sin significado todas las formulas proposicionales son sintácticamente diferentes unas de otras, excepto si son la misma cadena de símbolos.

- La introducción de la *semántica* a las fórmulas proposicionales consiste en reducir todas las situaciones posibles a dos: cierto o **verdadero** y **falso**.

- Aparece entonces una **relación de equivalencia entre fórmulas** que permiten identificar fórmulas equivalentes.

Lógica de proposiciones

- **Proposición**: Una condición/afirmación posible del mundo sobre el que queremos decir algo
- Una proposición puede ser **V**erdadera o **F**alsa (*valor de verdad*)
- Proposiciones ***simples***:
  - su valor de verdad no depende de otra proposición
- FBF proposicionales ***compuestas***:
  - su valor de verdad depende del que tengan las proposiciones simples que la definan y
  - del significado de las conectivas (definido por las *funciones de verdad*)

Interpretación de fórmulas

❑ Interpretación: **i**(FBF proposicional) = V / F

- En general, dar significado a las fórmulas (interpretar) de un lenguaje formal consiste en definir una función de interpretación (i), que es un dispositivo formal para asignar un significado a todas y cada una de las FBFs de un lenguaje proposicional

  L es un lenguaje proposicional, **i: $\mathbf{FBF_L} \Rightarrow \{V,F\}$**

- Le asigna el "**valor de verdad**" a las f.b.f. (decir si son verdaderas o falsas).

- El valor de verdad de una fórmula proposicional depende de:

  1. El valor de verdad de sus proposiciones (p, q, r,...)
     - o Para cada proposición: i(p) = V / F
  2. Las funciones de verdad de sus conectivas

Interpretación de fórmulas compuestas.

- Asignación de valores de verdad:
  - El número de funciones de verdad depende del conjunto de conectivas. Cada **conectiva** esta completamente definida por su **función de verdad**:
    - $fv_{\neg}(F) = V$; $fv_{\neg}(V) = F$
    - $fv_{\wedge}(F,F) = F$; $fv_{\wedge}(F,V) = F$; $fv_{\wedge}(V,F) = F$; $fv_{\wedge}(V,V) = V$;
    - $fv_{\vee}(F,F) = F$; $fv_{\vee}(F,V) = V$; $fv_{\vee}(V,F) = V$; $fv_{\vee}(V,V) = V$;
    - $fv_{\rightarrow}(F,F) = V$; $fv_{\rightarrow}(F,V) = V$; $fv_{\rightarrow}(V,F) = F$; $fv_{\rightarrow}(V,V) = V$;
    - $fv_{\leftrightarrow}(F,F) = V$; $fv_{\leftrightarrow}(F,V) = F$; $fv_{\leftrightarrow}(V,F) = F$; $fv_{\leftrightarrow}(V,V) = V$;
  - El valor de verdad de una fórmula compuesta es función de su **conectiva principal**. Una vez que las proposiciones han sido interpretadas, y las conectivas definidas, las fórmulas compuestas (no atómicas) pueden ser interpretadas:

    $i(\neg A) = fv_{\neg}(i(A))$
    $i(A \wedge B) = fv_{\wedge}(i(A),i(B))$
    $i(A \vee B) = fv_{\vee}(i(A),i(B))$
    $i(A \rightarrow B) = fv_{\rightarrow}(i(A),i(B))$
    $i(A \leftrightarrow B) = fv_{\leftrightarrow}(i(A),i(B))$

  - Se dice que **una interpretación i satisface** una **fórmula proposicional A**, si y sólo si (sii) es **verdadera** bajo esa interpretación (*i(A) = V*)

Interpretación de fórmulas compuestas.

- Ejemplo:
  - Asignar significado a $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$ para:
    $i(p) = i(q) = V$
    $i(r) = F$

$$i((p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)) =$$

$$fv_{\rightarrow}(i(p \rightarrow (q \vee r)), i((p \wedge q) \rightarrow \neg r)) =$$

$$fv_{\rightarrow}(fv_{\rightarrow}(i(p), i(q \vee r)), fv_{\rightarrow}(i(p \wedge q), i(\neg r))) =$$

$$fv_{\rightarrow}(fv_{\rightarrow}(i(p), fv_{\vee}(i(q), i(r))), fv_{\rightarrow}(fv_{\wedge}(i(p), i(q)), fv_{\neg}(i(r)))) =$$

$$fv_{\rightarrow}(fv_{\rightarrow}(V, fv_{\vee}(V,F)), fv_{\rightarrow}(fv_{\wedge}(V,V), fv_{\neg}(F))) =$$

$$fv_{\rightarrow}(fv_{\rightarrow}(V,V), fv_{\rightarrow}(V,V)) =$$

$$fv_{\rightarrow}(V,V) = V$$

$i(p)=V$
$i(q)=V$
$i(r)=F$

$fv_{\vee}(V,F)=V$
$fv_{\wedge}(V,V)=V$
$fv_{\neg}(F)=V$

$fv_{\rightarrow}(V,V)=V$

Interpretación de fórmulas compuestas.

- Ejercicio:
  - Asignar significado a $(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow r)$ para:
    $i(p) = i(q) = V$
    $i(r) = F$
  - Asignar significado a las siguientes fórmulas para toda posible interpretación:
    1. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
    2. $(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$
    3. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

Valores y funciones de verdad.

❑ Tablas de verdad

- Las funciones de verdad se suelen representar mediante una tabla.
- Las Tablas de verdad muestran todos los posibles valores de verdad que una fórmula proposicional puede tomar.

P	Q	$\neg$P	P$\wedge$Q	P$\vee$Q	P$\Rightarrow$Q	P$\Leftrightarrow$Q
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

Valores y funciones de verdad.

Símbolos de la lógica proposicional semántica.

- **Constantes proposicionales**: conectivas o conectores.
  - <u>Negador</u>.
    - Se representa por el símbolo ¬.
    - Produce fórmulas del tipo "¬p" ≡ "no es cierto que p", "no es p", ...
    - El negador es la conectiva que invierte el valor de verdad de una proposición.
    - Su tabla de verdad es:

p	¬
V	F
F	V

  - <u>Conjuntor</u>.
    - Se representa por el símbolo ∧.
    - Produce fórmulas del tipo "p∧q" ≡ "p y q".
    - El conjuntor es la conectiva que da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas solamente cuando son verdaderas las dos proposiciones que las componen.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	p ∧ q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Valores y funciones de verdad.

❑ Símbolos de la lógica proposicional semántica.

- **Constantes proposicionales**: conectivas o conectores.

  - Disyuntor.
    - Se representa por el símbolo ∨.
    - Produce fórmulas del tipo "p∨q" ≡ "p o q".
    - El disyuntor da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas cuando una de las proposiciones que las componen es verdadera.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	p∨q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

  - Condicional o implicador
    - Se representa por el símbolo →.
    - Produce fórmulas del tipo "p → q" ≡ "si p entonces q", "cuando p entonces q".
    - El implicador es una concectiva que da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas en todos los casos menos cuando siendo verdadero el antecedente, es falso el cosecuente.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	p→q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Valores y funciones de verdad.

❑ Símbolos de la lógica proposicional semántica.

- **Constantes proposicionales**: conectivas o conectores.

  - <u>Bicondicional o coimplicador</u>
    - Se representa por el símbolo ↔.
    - Produce fórmulas del tipo "p ↔ q" ≡ "p coimplica a q", "si y solo si p entonces q", "únicamente si p entonces q".
    - El coimplicador es una concectiva que da lugar a fórmulas complejas que son verdaderas cuando coinciden los valores de verdad de las proposiciones que las componen.
    - Su tabla de verdad es:

p	q	p↔q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V