

**LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática**  
Facultad de Informática  
Universidad Politécnica de Madrid

# Lógica Computacional: Estandarización de Fórmulas

Petr Sosík



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Estandarización de Fórmulas

- ◉ Objetivo: Simplificar las fórmulas para técnicas de deducción automáticas (computables)
  - Queremos obtener, mediante una serie de transformaciones, una fórmula que sea más fácil de manipular automáticamente, pero que siga teniendo ciertas propiedades de la fórmula original (estandarización)
- ◉ *Fórmula en un lenguaje de primer orden*
  - $\exists y ( \forall x (P(x,f(y)) \rightarrow Q(z)) \vee \neg \exists w P(g(w),y))$
- ◉ *Fórmula en forma normal de Skolem*
  - $\forall x \forall w (\neg P(x,f(b)) \vee Q(a) \vee \neg P(g(w),b))$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Estandarización de Fórmulas

## ◉ Forma Normal de Skolem (FNS):

- Todos los cuantificadores a la cabeza de la fórmula (forma Prenex)
- No hay variables libres
- Sólo hay cuantificadores universales
- Matriz de la fórmula (subfórmula tras los cuantificadores) en forma normal conjuntiva (FNC, conjunción de disyunciones de literales)

## ◉ Método para obtener la FNS de cualquier fórmula:

1. Poner la fórmula en forma Prenex
2. Realizar el cierre existencial
3. Poner la fórmula en forma normal conjuntiva
4. Eliminar los cuantificadores existenciales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Forma Prenex

- Se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:

- Cambio de nombre de variables ligadas:

- $\vdash \forall xA(x) \leftrightarrow \forall yA(x/y)$                        $\vdash \exists xA(x) \leftrightarrow \exists yA(x/y)$                       si y no está ya en A
- Si x es ligada por un  $\forall$  o  $\exists$  y en el mismo tiempo aparece en la fórmula también libre o ligada por otro cuantificador, **¡debe ser renombrada!**                       $\forall xA(x) \vee \forall xC(x) \leftrightarrow \forall x\forall y (A(x) \vee C(y))$

- Interdefinición de cuantificadores:

- $\vdash \neg\forall xA(x) \leftrightarrow \exists x\neg A(x)$                        $\vdash \neg\exists xA(x) \leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

- Distribución de conectivas respecto a cuantificadores

- $\vdash \forall xA \wedge C \leftrightarrow \forall x(A \wedge C)$                        $\vdash (\forall xA \rightarrow C) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow C)$
- $\vdash \exists xA \wedge C \leftrightarrow \exists x(A \wedge C)$                        $\vdash (\exists xA \rightarrow C) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow C)$
- $\vdash \forall xA \vee C \leftrightarrow \forall x(A \vee C)$                        $\vdash (C \rightarrow \forall xA) \leftrightarrow \forall x(C \rightarrow A)$
- $\vdash \exists xA \vee C \leftrightarrow \exists x(A \vee C)$                        $\vdash (C \rightarrow \exists xA) \leftrightarrow \exists x(C \rightarrow A)$

Si x está libre en la otra subfórmula, **¡debe ser renombrado!**

- Lema: Para toda la fórmula A,  $\vdash A \leftrightarrow \text{Prenex}(A)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Cierre Existencial

- Las variables libres de la fórmula se ligan existencialmente poniendo el cuantificador correspondiente en cabeza de la fórmula
- Lema: Una fórmula  $A(x)$  es satisfacible sii  $\exists xA(x)$  es satisfacible
- Ejemplo:
  - $\forall y\exists z(p(x) \wedge q(y) \rightarrow r(f(z), x))$  se transformaría en  $\exists x\forall y\exists z(p(x) \wedge q(y) \rightarrow r(f(z), x))$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:
  - Interdefinición:
    - $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$   
Si A o B contiene una conjunción, debe cerrar este A o B a paréntesis.  
P.ej.  $\neg(p(x) \rightarrow q(x) \wedge r(x)) \leftrightarrow (\neg p(x) \vee (q(x) \wedge r(x)))$
    - $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  - Leyes de Morgan
    - $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
    - $\neg\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
  - Distribución de  $\vee$  y  $\wedge$ 
    - $\neg(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$
    - $\neg A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Eliminación de cuantificadores existenciales (Skolemización)

- Se elimina el cuantificador existencial sustituyendo la variable que ligaba por una función de Skolem o constante de Skolem
- La función de Skolem será una función nueva en la fórmula, aplicada a todas las variables cuantificadas universalmente que aparecen antes que el cuantificador existencial a eliminar. Si no hay tales variables se utilizará una constante nueva en la fórmula.
- Ejemplos:
  - $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow \neg Q(y))$  se transformaría en  $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(f(x)))$
  - $\exists x \forall z (Q(x,z) \vee R(a,x))$  se transformaría en  $\forall z (Q(b,z) \vee R(a,b))$
  - $\exists x \forall y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(f(z), x))$  se transformaría en  $\forall y (P(a) \wedge Q(y) \rightarrow R(f(g(y)), a))$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Que preserva la transformación a FNS?

- ◉ Consideremos una formula A transformada a su FNS A'
  - La transformación preserva la **satisfacibilidad**: A es satisfacible sii A' es satisfacible (aunque pueden tener modelos distintos)
  - Pero **NO** preserva todos los **modelos**: no es verdad que, para toda interpretación i, i es un modelo de A sii es un modelo de A'
  - Entonces el resultado **NO** es equivalente a la fórmula original

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Analysis detallada de la preservación

- ⊙ **Teorema: Una fórmula A es satisfacible sii FNS(A) es satisfacible**
  1. A satisfacible sii Prenex(A) satisfacible (por lemas 1 y 5)
  2. Prenex(A) satisfacible sii Cierre(Prenex(A)) satisfacible (por lema 2)
  3. Sea Cierre(Prenex(A)) satisfacible de la forma Q.M, donde Q son los cuantificadores y M es la matriz de la fórmula. Entonces M satisfacible sii FNC(M) satisfacible (por lemas 3 y 5)
  4. Pero también Q.M satisfacible sii Q. FNC(M) satisfacible, puesto que cuantifican las mismas variables en idéntica forma
  5. Q.FNC(M) satisfacible sii Skolem(Q.FNC(M)) satisfacible (por lema 4). Pero Skolem(Q.FNC(M)) es precisamente FNS(A)
  6. A satisfacible sii FNS(A) satisfacible (por silogismo 1, 2, 3, 4, 5)
  - Lema 1: Para toda fórmula A,  $\vdash A \leftrightarrow \text{Prenex}(A)$
  - Lema 2: Una fórmula  $A(x)$  es satisfacible sii  $\exists x A(x)$  es satisfacible
  - Lema 3: Para toda fórmula A,  $\vdash A \leftrightarrow \text{FNC}(A)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Forma Clausular

- ◉ Sabemos que “Una fórmula  $A$  es satisfacible sii  $FNS(A)$  es satisfacible” y que “ $FNS(A)$  existe siempre para cualquier fórmula  $A$ ”, luego **podemos trabajar exclusivamente con fórmulas en forma normal de Skolem** si sólo tuviéramos que comprobar la satisfacibilidad
- ◉ Para trabajar más cómodamente con fórmulas en FNS utilizaremos la forma clausular
  - Cláusula: Disyunción de literales
  - La forma clausular de una fórmula  $A$  es el conjunto de cláusulas de la  $FNS(A)$
  - La forma clausular se entiende como la conjunción de las cláusulas, cuyas variables están todas ellas ligadas universalmente.
- ◉ Ejemplo:
  - $A: \forall x \forall y (P(x) \wedge (Q(y) \vee R(a,x)))$
  - $FC(A): \{P(x), Q(y) \vee R(a,x)\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Forma clausular de una deducción

- ◉ Una deducción  $T[P_1, P_2, \dots, P_n] \vdash C$  es correcta sii  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg C$  es insatisfacible
- ◉ Dada una deducción:  $T[P_1, P_2, \dots, P_n] \vdash C$ 
  1. Obtener la forma clausular de cada  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq n$
  2. Obtener la forma clausular de  $\neg C$
  3. Realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
  4. Comprobar la satisfacibilidad

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Resumen

- Los pasos para expresar una fórmula en forma clausular:
  1. Forma Prenex: **preserva modelos**
  2. Realizar el cierre existencial: **preserva satisfacibilidad**
  3. Poner la fórmula en forma normal conjuntiva: **preserva modelos**
  4. Eliminar los cuantificadores existenciales (forma normal Skolem): **preserva satisfacibilidad**
  5. Escribir la fórmula en la forma clausular (solo un cambio de notación)
- En total, transformación a la forma clausular **preserva satisfacibilidad pero no modelos**
- Una fórmula en forma clausular es satisficible sii existe una interpretación que es modelo de **todas** las cláusulas
- Expresar deducción  $T[P_1, P_2, \dots, P_n] \vdash C$  en forma clausular:
  - Expresar las premisas  $P_1, P_2, \dots, P_n$  y **negación**  $\neg C$  de la conclusión en forma clausular
  - Hacer **unión** de todos los conjuntos de cláusulas resultantes
- Una deducción es **correcta sii su forma clausular es insatisficible**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70