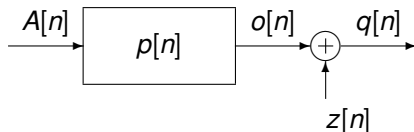


TEMA 4

DETECCIÓN EN CANALES CON INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA: ALGORITMO DE VITERBI

- Definición de canal discreto equivalente

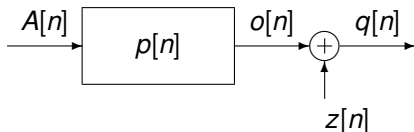
$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n] = \sum_k A[k] \cdot p[n - k] + z[n]$$



Modelo General

- Definición de canal discreto equivalente

$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n] = \sum_k A[k] \cdot p[n - k] + z[n]$$



- Secuencia de símbolos $A[n]$: constelación de M puntos

- ▶ Secuencia blanca con media nula

$$E[A[n]] = 0, \quad R_A[k] = E[A[n+k]A^*[n]] = E_s \cdot \delta[k], \quad S_A(e^{j\omega}) = E_s$$

- Sin canal $h_{eq}(t)$:

- ▶ $f(t) = g(-t)$

- ▶ $p(t) = g(t) * g(-t)$ cumpla Nyquist

- ▶ $z[n]$ blanco y gaussiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \mathbb{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathbb{C} \end{cases}$

Modelo General

- Sin canal $h_{eq}(t)$:
 - ▶ $f(t) = g(-t)$
 - ▶ $p(t) = g(t) * g(-t)$ cumpla Nyquist
 - ▶ $z[n]$ blanco y gaussiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \mathbb{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathbb{C} \end{cases}$
- Respuesta $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t)$ causal y limitada en el tiempo

- Sin canal $h_{eq}(t)$:
 - ▶ $f(t) = g(-t)$
 - ▶ $p(t) = g(t) * g(-t)$ cumpla Nyquist
 - ▶ $z[n]$ blanco y gaussiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \mathbb{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathbb{C} \end{cases}$
- Respuesta $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t)$ causal y limitada en el tiempo
 - ▶ $p[n]$ causal de longitud $K + 1 \rightarrow K$ **es la memoria del canal**

- Sin canal $h_{eq}(t)$:
 - ▶ $f(t) = g(-t)$
 - ▶ $p(t) = g(t) * g(-t)$ cumpla Nyquist
 - ▶ $z[n]$ blanco y gaussiano: $\sigma_z^2 = \begin{cases} N_0/2, & A[n] \in \mathbb{R} \\ N_0, & A[n] \in \mathbb{C} \end{cases}$
- Respuesta $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t)$ causal y limitada en el tiempo
 - ▶ $p[n]$ causal de longitud $K + 1 \rightarrow K$ **es la memoria del canal**
 - ▶ Observación a la salida del demodulador

$$q[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^K p[k]A[n-k]}_{o[n]} + z[n]$$

- ▶ $o[n]$ es la salida del sistema equivalente sin ruido

Detector símbolo a símbolo sin memoria: Retardo d

- Canal ideal: $p[n] = C \cdot \delta[n - d]$ (con retardo d)
- La observación $q[n]$ se usa para decidir $A[n - d]$

$$q[n] = \underbrace{p[d] \cdot A[n - d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{k \neq d} p[k] \cdot A[n - k]}_{\text{ISI}} + \underbrace{z[n]}_{\text{ruido}}$$

Detector símbolo a símbolo sin memoria: Retardo d

- Canal ideal: $p[n] = C \cdot \delta[n - d]$ (con retardo d)
- La observación $q[n]$ se usa para decidir $A[n - d]$

$$q[n] = \underbrace{p[d] \cdot A[n - d]}_{\text{término deseado}} + \underbrace{\sum_{k \neq d} p[k] \cdot A[n - k]}_{\text{ISI}} + \underbrace{z[n]}_{\text{ruido}}$$

- Elección del retardo d
 - ▶ Seleccionar d tal que $|p[d]| \geq |p[n]| \forall n$
 - ▶ En ausencia de ISI y de ruido, el detector lo tendría fácil...

$$\frac{q[n]}{p[d]} = A[n - d] + \sum_{k \neq d} \frac{p[k]}{p[d]} \cdot A[n - k] + \frac{z[n]}{p[d]}$$

Selección del retardo óptimo - Ejemplo

- Transmisión de 2-PAM sobre $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n - 1] + \frac{1}{4}\delta[n - 2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2} A[n] + A[n - 1] + \frac{1}{4} A[n - 2]$

Selección del retardo óptimo - Ejemplo

- Transmisión de 2-PAM sobre $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2} A[n] + A[n-1] + \frac{1}{4} A[n-2]$

Retardo $d = 0$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|----------------|
| +1 | +1 | +1 | $+\frac{7}{4}$ |
| +1 | +1 | -1 | $+\frac{5}{4}$ |
| +1 | -1 | +1 | $-\frac{1}{4}$ |
| +1 | -1 | -1 | $-\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | +1 | $+\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | -1 | $+\frac{1}{4}$ |
| -1 | -1 | +1 | $-\frac{5}{4}$ |
| -1 | -1 | -1 | $-\frac{7}{4}$ |

Retardo $d = 1$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|----------------|
| +1 | +1 | +1 | $+\frac{7}{4}$ |
| +1 | +1 | -1 | $+\frac{5}{4}$ |
| +1 | -1 | +1 | $-\frac{1}{4}$ |
| +1 | -1 | -1 | $-\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | +1 | $+\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | -1 | $+\frac{1}{4}$ |
| -1 | -1 | +1 | $-\frac{5}{4}$ |
| -1 | -1 | -1 | $-\frac{7}{4}$ |

Azul : $A[n-d] = +1$ Rojo : $A[n-d] = -1$

Selección del retardo óptimo - Ejemplo

- Transmisión de 2-PAM sobre $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2} A[n] + A[n-1] + \frac{1}{4} A[n-2]$

Retardo $d = 0$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|----------------|
| +1 | +1 | +1 | $+\frac{7}{4}$ |
| +1 | +1 | -1 | $+\frac{5}{4}$ |
| +1 | -1 | +1 | $-\frac{1}{4}$ |
| +1 | -1 | -1 | $-\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | +1 | $+\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | -1 | $+\frac{1}{4}$ |
| -1 | -1 | +1 | $-\frac{5}{4}$ |
| -1 | -1 | -1 | $-\frac{7}{4}$ |

Retardo $d = 1$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|----------------|
| +1 | +1 | +1 | $+\frac{7}{4}$ |
| +1 | +1 | -1 | $+\frac{5}{4}$ |
| +1 | -1 | +1 | $-\frac{1}{4}$ |
| +1 | -1 | -1 | $-\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | +1 | $+\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | -1 | $+\frac{1}{4}$ |
| -1 | -1 | +1 | $-\frac{5}{4}$ |
| -1 | -1 | -1 | $-\frac{7}{4}$ |

Azul : $A[n-d] = +1$ Rojo : $A[n-d] = -1$

- El símbolo asociado al mayor valor de $|p[n]|$ es el que tiene mayor contribución sobre $o[n]$
 - ▶ El signo de $o[n]$ depende en este caso de $A[n-1]$

Efecto del valor del cursor $p[d]$: escalado

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] + 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$

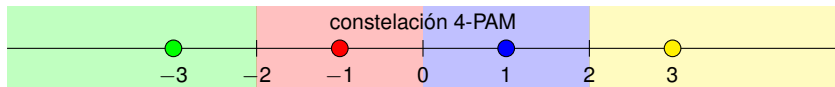
Efecto del valor del cursor $p[d]$: escalado

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] + 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$

Efecto del valor del cursor $p[d]$: escalado

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] + 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$

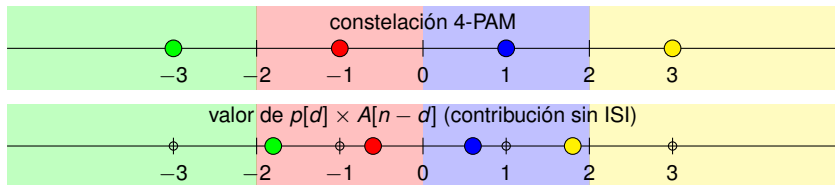
- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$



Efecto del valor del cursor $p[d]$: escalado

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] + 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$

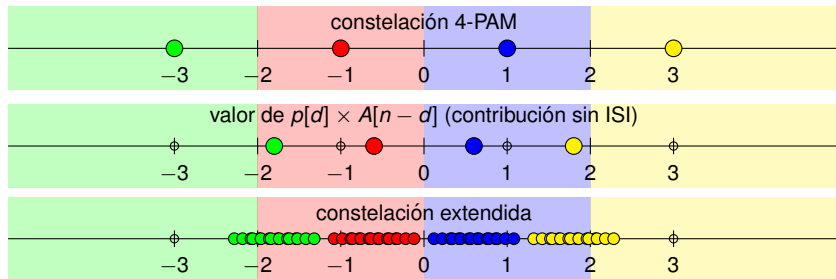
- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$



Efecto del valor del cursor $p[d]$: escalado

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] + 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$

- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$



- El cursor establece un escalado general sobre la constelación recibida

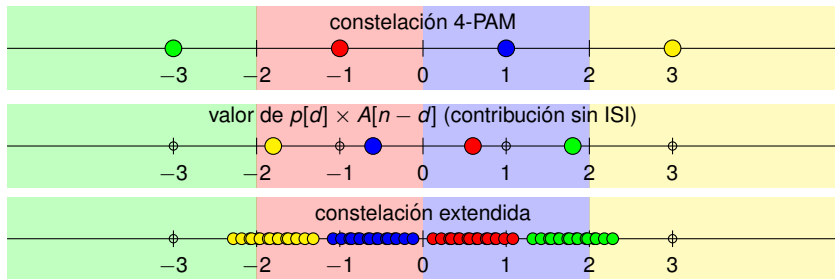
Efecto del valor del cursor $p[d]$: signo del cursor

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$

Efecto del valor del cursor $p[d]$: signo del cursor

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$

- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$



- Un signo negativo en el cursor “*invierte*” la constelación

Efecto del valor del cursor $p[d]$: opciones

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$
- Hay dos opciones para tener en cuenta el valor del cursor

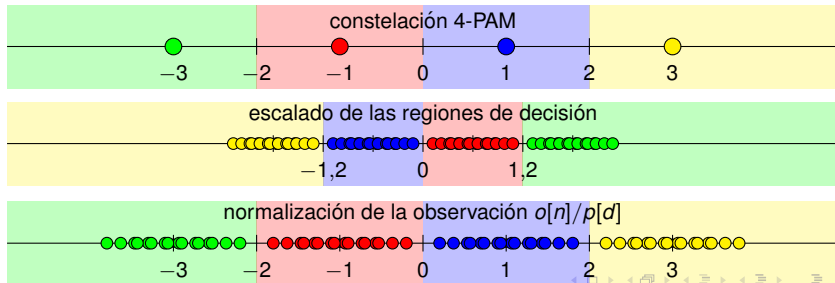
Efecto del valor del cursor $p[d]$: opciones

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$
- Hay dos opciones para tener en cuenta el valor del cursor
 - ▶ Escalar las regiones de decisión de acuerdo al cursor (teniendo en cuenta el signo)
 - ▶ Normalización de la observación: dividir por el valor del cursor

Efecto del valor del cursor $p[d]$: opciones

- Ejemplo: constelación 4-PAM : $A[n] \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- Canal discreto equivalente: $p[n] = 0,1 \delta[n] - 0,6 \delta[n - 1] - 0,05 \delta[n - 2]$
 - ▶ Retardo óptimo para la decisión: $d = 1$
- Hay dos opciones para tener en cuenta el valor del cursor
 - ▶ Escalar las regiones de decisión de acuerdo al cursor (teniendo en cuenta el signo)
 - ▶ Normalización de la observación: dividir por el valor del cursor

- $A[n - d] = +3$
- $A[n - d] = +1$
- $A[n - d] = -1$
- $A[n - d] = -3$



Normalización de la observación: efecto sobre el ruido

- Normalización de la observación

$$q_n[n] = \frac{q[n]}{p[d]} = o_n[n] + z_n[n]$$

$$o_n[n] = \frac{o[n]}{p[d]} \quad z_n[n] = \frac{z[n]}{p[d]}$$

- Efecto sobre el ruido: modificación de su potencia (varianza)

$$\sigma_{z_n}^2 = \sigma_z^2 \times \frac{1}{|p[d]|^2}$$

- ▶ Importante para el cálculo de las probabilidades de error

- Cuantifica la distorsión de ISI introducida por un canal

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} \geq 0$$

- Cuantifica la distorsión de ISI introducida por un canal

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} \geq 0$$

- ▶ Distorsión de pico D_{pico} (medida de distorsión)

$$D_{pico} = \sum_{k \neq d} \frac{|p[k]|}{|p[d]|} \geq 0$$

- Cuantifica la distorsión de ISI introducida por un canal

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} \geq 0$$

- ▶ Distorsión de pico D_{pico} (medida de distorsión)

$$D_{pico} = \sum_{k \neq d} \frac{|p[k]|}{|p[d]|} \geq 0$$

- ▶ Eficiencia de la constelación η (separación de los símbolos)

$$\eta = \frac{(d_{min}/2)}{|A|_{max}} \geq 0$$

d_{min} : mínima distancia entre puntos de la constelación

$|A|_{max}$: valor máximo de $|A[n]|$ en la constelación

- Cuantifica la distorsión de ISI introducida por un canal

$$\gamma_{ISI} = \frac{D_{pico}}{\eta} \geq 0$$

- ▶ Distorsión de pico D_{pico} (medida de distorsión)

$$D_{pico} = \sum_{k \neq d} \frac{|p[k]|}{|p[d]|} \geq 0$$

- ▶ Eficiencia de la constelación η (separación de los símbolos)

$$\eta = \frac{(d_{min}/2)}{|A|_{max}} \geq 0$$

d_{min} : mínima distancia entre puntos de la constelación

$|A|_{max}$: valor máximo de $|A[n]|$ en la constelación

- Análisis del diagrama de ojo:

- ▶ $\gamma_{ISI} < 1$: detector símbolo a símbolo **no comete errores**
- ▶ $\gamma_{ISI} > 1$: detector símbolo a símbolo **comete errores**

Nivel de ISI: Ejemplo 2-PAM

- $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + c \cdot \delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n-1] + c \cdot A[n-2]$

Retardo $d = 1$, $c = \frac{1}{4}$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|----------------|
| +1 | +1 | +1 | $+\frac{7}{4}$ |
| +1 | +1 | -1 | $+\frac{5}{4}$ |
| +1 | -1 | +1 | $-\frac{1}{4}$ |
| +1 | -1 | -1 | $-\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | +1 | $+\frac{3}{4}$ |
| -1 | +1 | -1 | $+\frac{1}{4}$ |
| -1 | -1 | +1 | $-\frac{5}{4}$ |
| -1 | -1 | -1 | $-\frac{7}{4}$ |

Retardo $d = 1$, $c = \frac{1}{2}$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|--------|
| +1 | +1 | +1 | +2 |
| +1 | +1 | -1 | +1 |
| +1 | -1 | +1 | 0 |
| +1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | +1 | +1 | +1 |
| -1 | +1 | -1 | 0 |
| -1 | -1 | +1 | -1 |
| -1 | -1 | -1 | -2 |

• ISI level

- ▶ $c = \frac{1}{4}$: $\eta = 1$, $D_{pico} = \frac{3}{4}$, $\gamma_{ISI} = \frac{3}{4}$
- ▶ $c = \frac{1}{2}$: $\eta = 1$, $D_{pico} = 1$, $\gamma_{ISI} = 1$

Constelaciones y regiones de decisión

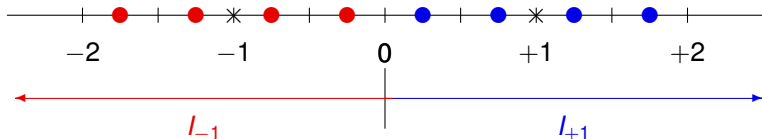
• $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n-1] + c \cdot A[n-2]$

• $A[n-1] = +1$

• $A[n-1] = -1$

$c = \frac{1}{4}$

$\gamma_{ISI} = \frac{3}{4}$

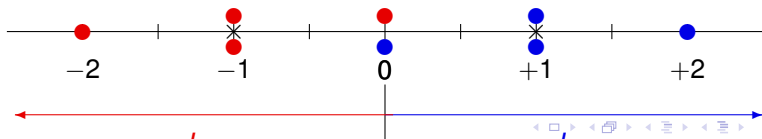


• $A[n-1] = +1$

• $A[n-1] = -1$

$c = \frac{1}{2}$

$\gamma_{ISI} = 1$



Nivel de ISI: Ejemplo 2-PAM

- $p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + c \cdot \delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n-1] + c \cdot A[n-2]$

Retardo $d = 1$, $c = \frac{3}{4}$

| $A[n]$ | $A[n-1]$ | $A[n-2]$ | $o[n]$ |
|--------|----------|----------|----------------|
| +1 | +1 | +1 | $+\frac{9}{4}$ |
| +1 | +1 | -1 | $+\frac{3}{4}$ |
| +1 | -1 | +1 | $+\frac{1}{4}$ |
| +1 | -1 | -1 | $-\frac{5}{4}$ |
| -1 | +1 | +1 | $+\frac{5}{4}$ |
| -1 | +1 | -1 | $-\frac{1}{4}$ |
| -1 | -1 | +1 | $-\frac{3}{4}$ |
| -1 | -1 | -1 | $-\frac{9}{4}$ |

- ISI level

► $c = \frac{3}{4}$: $\eta = 1$, $D_{pico} = \frac{5}{4}$, $\gamma_{ISI} = \frac{5}{4}$

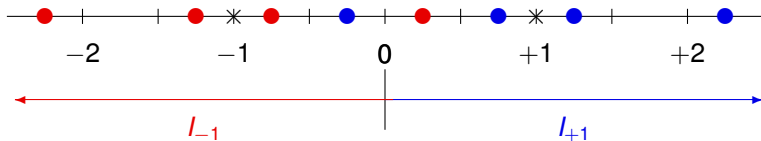
Constelaciones y regiones de decisión

- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n-1] + c \cdot A[n-2]$

- $A[n-1] = +1$

- $A[n-1] = -1$

$$c = \frac{3}{4}$$
$$\gamma_{ISI} = \frac{5}{4}$$



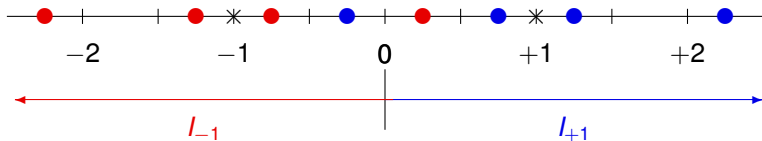
Constelaciones y regiones de decisión

- $o[n] = A[n] * p[n] = \frac{1}{2}A[n] + A[n-1] + c \cdot A[n-2]$

- $A[n-1] = +1$

- $A[n-1] = -1$

$$c = \frac{3}{4}$$
$$\gamma_{ISI} = \frac{5}{4}$$



RE-DEFINICIÓN DE REGIONES DE DECISIÓN



- Diagrama de ojo **cerrado**

Detección de la secuencia de ML

- Detección óptima bajo **ISI**: Decisión **no** se toma símbolo a símbolo.

Detección de la secuencia de ML

- Detección óptima bajo **ISI**: Decisión **no** se toma símbolo a símbolo.
- Secuencia a detectar: L símbolos (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L - 1]]^T$$

Detección de la secuencia de ML

- Detección óptima bajo **ISI**: Decisión **no** se toma símbolo a símbolo.
- Secuencia a detectar: L **símbolos** (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Canal de memoria K : $\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K]]^T$

Detección de la secuencia de ML

- Detección óptima bajo **ISI**: Decisión **no** se toma símbolo a símbolo.
- Secuencia a detectar: L **símbolos** (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Canal de memoria K : $\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K]]^T$
- Estadístico suficiente para la detección: $N_q = K + L$ observaciones

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K + L$$

Detección de la secuencia de ML

- Detección óptima bajo **ISI**: Decisión **no** se toma símbolo a símbolo.
- Secuencia a detectar: L símbolos (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Canal de memoria K : $\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K]]^T$
- Estadístico suficiente para la detección: $N_q = K + L$ observaciones

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K + L$$

$$o[0] = p[0] \cdot A[0] + p[1] \cdot A[-1] + p[2] \cdot A[-2] + \dots + p[K] \cdot A[-K]$$

$$o[1] = p[0] \cdot A[1] + p[1] \cdot A[0] + p[2] \cdot A[-1] \dots + p[K] \cdot A[-K + 1]$$

...

$$o[K + L - 1] = p[0] \cdot A[K + L - 1] + p[1] \cdot A[K + L - 2] + \dots \\ + p[K - 1] \cdot A[L] + p[K] \cdot A[L - 1]$$

Detección de la secuencia de ML

- Detección óptima bajo **ISI**: Decisión **no** se toma símbolo a símbolo.
- Secuencia a detectar: L símbolos (M^L posibles secuencias)

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Canal de memoria K : $\mathbf{p} = [p[0], p[1], \dots, p[K]]^T$
- Estadístico suficiente para la detección: $N_q = K + L$ observaciones

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K + L$$

$$o[0] = p[0] \cdot A[0] + p[1] \cdot A[-1] + p[2] \cdot A[-2] + \dots + p[K] \cdot A[-K]$$

$$o[1] = p[0] \cdot A[1] + p[1] \cdot A[0] + p[2] \cdot A[-1] \dots + p[K] \cdot A[-K + 1]$$

...

$$o[K + L - 1] = p[0] \cdot A[K + L - 1] + p[1] \cdot A[K + L - 2] + \dots \\ + p[K - 1] \cdot A[L] + p[K] \cdot A[L - 1]$$

- Información adicional necesaria: K símbolos anteriores y K posteriores

$$A[-1], A[-2], \dots, A[-K] \text{ y } A[L], A[L + 1], \dots, A[L + K - 1]$$

Detección de la secuencia de ML

- Para L símbolos de un alfabeto de M posibles símbolos, existen M^L secuencias posibles

$$\mathbf{a}_i = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T, \quad i = 0, 1, \dots, M^L - 1$$

Detección de la secuencia de ML

- Para L símbolos de un alfabeto de M posibles símbolos, existen M^L secuencias posibles

$$\mathbf{a}_i = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T, \quad i = 0, 1, \dots, M^L - 1$$

- Secuencia con la máxima verosimilitud:
 - ▶ Se detecta/decide/escoge la secuencia

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{a}_i = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T$$

que cumple

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) \geq f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_j), \quad j = 0, 1, \dots, M^L - 1, \quad \forall j \neq i.$$

Es decir, se escoge la secuencia **más probable**.

- Expresión analítica de la verosimilitud

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \prod_{n=0}^{N_q-1} f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i)$$

- Expresión analítica de la verosimilitud

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \prod_{n=0}^{N_q-1} f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i)$$

- Distribución condicional para cada observación (cada n)

$$f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i) = \mathcal{N}(o_i[n], \sigma_z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} |q[n] - o_i[n]|^2\right\}$$

- Expresión analítica de la verosimilitud

$$f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \prod_{n=0}^{N_q-1} f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i)$$

- Distribución condicional para cada observación (cada n)

$$f_{q[n]|\mathbf{A}}(q[n]|\mathbf{a}_i) = \mathcal{N}(o_i[n], \sigma_z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} |q[n] - o_i[n]|^2\right\}$$

- Secuencia más verosímil: la que tenga mayor verosimilitud

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \max_{\mathbf{a}_i} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma_z^2)^{N_q/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2\right\}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{a}_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2, \quad o_i[n] = \sum_{k=0}^K p[k] \cdot a_i[n-k]$$

Detección de la secuencia de ML: Resumen

- Secuencia a detectar: L símbolos

$$\mathbf{A} = [A[0], A[1], \dots, A[L-1]]^T$$

- Estadístico suficiente para la detección:

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N_q - 1]], \quad N_q = K + L$$

- Información adicional: K símbolos anteriores y K posteriores

$$A[-1], A[-2], \dots, A[-K] \text{ y } A[L], A[L+1], \dots, A[L+K-1]$$

- Secuencia más verosímil

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{a}_i} \sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o_i[n]|^2$$

$$\hat{\mathbf{A}} = [a_i[0], a_i[1], \dots, a_i[L-1]]^T$$

Ejemplo ML: 2-PAM $K = 1, L = 3$

- Problema: decidir la secuencia de 3 símbolos cuando
 - ▶ Se recibe $q[0] = 1,4 - q[1] = -0,4 - q[2] = 0,6 - q[3] = 1,6$
 - ▶ Constelación de símbolos 2-PAM: $A[n] \in \{\pm 1\}$
 - ▶ Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1], K = 1$

Ejemplo ML: 2-PAM $K = 1, L = 3$

- Problema: decidir la secuencia de 3 símbolos cuando
 - ▶ Se recibe $q[0] = 1,4 - q[1] = -0,4 - q[2] = 0,6 - q[3] = 1,6$
 - ▶ Constelación de símbolos 2-PAM: $A[n] \in \{\pm 1\}$
 - ▶ Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1], K = 1$
- Solución:
 - ▶ Secuencia a estimar: $\mathbf{A} = [A[0], A[1], A[2]], L = 3$

Ejemplo ML: 2-PAM $K = 1, L = 3$

- Problema: decidir la secuencia de 3 símbolos cuando
 - ▶ Se recibe $q[0] = 1,4 - q[1] = -0,4 - q[2] = 0,6 - q[3] = 1,6$
 - ▶ Constelación de símbolos 2-PAM: $A[n] \in \{\pm 1\}$
 - ▶ Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1], K = 1$
- Solución:
 - ▶ Secuencia a estimar: $\mathbf{A} = [A[0], A[1], A[2]], L = 3$
 - ▶ Estadístico para la decisión: $\mathbf{q} = [q[0], q[1], q[2], q[3]]$

Ejemplo ML: 2-PAM $K = 1, L = 3$

- Problema: decidir la secuencia de 3 símbolos cuando
 - ▶ Se recibe $q[0] = 1,4 - q[1] = -0,4 - q[2] = 0,6 - q[3] = 1,6$
 - ▶ Constelación de símbolos 2-PAM: $A[n] \in \{\pm 1\}$
 - ▶ Canal: $p[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1], K = 1$
- Solución:
 - ▶ Secuencia a estimar: $\mathbf{A} = [A[0], A[1], A[2]], L = 3$
 - ▶ Estadístico para la decisión: $\mathbf{q} = [q[0], q[1], q[2], q[3]]$

$$q[-1] = A[-1] + 0,5 \cdot A[-2] + z[-1]$$

$$q[0] = A[0] + 0,5 \cdot A[-1] + z[0]$$

$$q[1] = A[1] + 0,5 \cdot A[0] + z[1]$$

$$q[2] = A[2] + 0,5 \cdot A[1] + z[2]$$

$$q[3] = A[3] + 0,5 \cdot A[2] + z[3]$$

$$q[4] = A[4] + 0,5 \cdot A[3]$$

- ▶ Premisa: Se conoce el valor de $A[-1] = A[3] = +1$

Detección: Comparación con las salidas sin ruido

$$\mathbf{q} : q[0] = 1,4, q[1] = -0,4, q[2] = 0,6, q[3] = 1,6$$

- Evaluación de las salidas sin ruido, $o[n]$, generadas por las $M^L = 8$ posibles **secuencias**, y su correspondiente métrica de verosimilitud

$$\sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

| A[0] | A[1] | A[2] | o[0] | o[1] | o[2] | o[3] | Métrica |
|------|------|------|------|------|------|------|---------|
| -1 | -1 | -1 | -0,5 | -1,5 | -1,5 | +0,5 | 10,44 |
| -1 | -1 | +1 | -0,5 | -1,5 | +0,5 | +1,5 | 4,84 |
| -1 | +1 | -1 | -0,5 | +0,5 | -0,5 | +0,5 | 6,84 |
| -1 | +1 | +1 | -0,5 | +0,5 | +1,5 | +1,5 | 5,24 |
| +1 | -1 | -1 | +1,5 | -0,5 | -1,5 | +0,5 | 5,64 |
| +1 | -1 | +1 | +1,5 | -0,5 | +0,5 | +1,5 | 0,04 |
| +1 | +1 | -1 | +1,5 | +1,5 | -0,5 | +0,5 | 6,04 |
| +1 | +1 | +1 | +1,5 | +1,5 | +1,5 | +1,5 | 4,44 |

Detección: Comparación con las salidas sin ruido

$$\sum_{n=0}^{N_q-1} |q[n] - o[n]|^2$$

| A[0] | A[1] | A[2] | o[0] | o[1] | o[2] | o[3] | Métrica |
|------|------|------|------|------|------|------|---------|
| -1 | -1 | -1 | -0,5 | -1,5 | -1,5 | +0,5 | 10,44 |
| -1 | -1 | +1 | -0,5 | -1,5 | +0,5 | +1,5 | 4,84 |
| -1 | +1 | -1 | -0,5 | +0,5 | -0,5 | +0,5 | 6,84 |
| -1 | +1 | +1 | -0,5 | +0,5 | +1,5 | +1,5 | 5,24 |
| +1 | -1 | -1 | +1,5 | -0,5 | -1,5 | +0,5 | 5,64 |
| +1 | -1 | +1 | +1,5 | -0,5 | +0,5 | +1,5 | 0,04 |
| +1 | +1 | -1 | +1,5 | +1,5 | -0,5 | +0,5 | 6,04 |
| +1 | +1 | +1 | +1,5 | +1,5 | +1,5 | +1,5 | 4,44 |

- Secuencia con la salida sin ruido “más parecida” (ML):

+1 -1 +1

Estima eficiente: Definición de estado del sistema

 $\psi[n]$

- El cálculo ML para cada posible secuencia es ineficiente (M^L posibles secuencias). **Intratable cuando L aumenta.**
- La salida sin ruido es una máquina de estados finitos

$$o[n] = A[n] \cdot p[0] + \sum_{k=1}^K p[k] \cdot A[n - k]$$

- Estado en el instante discreto n depende de los **K símbolos previos (pasado)** que contribuyen en $o[n]$

$$\psi[n] = [A[n - 1], A[n - 2], \dots, A[n - K]]^T$$

Número de posibles estados es M^K .

- Dependencias

$$o[n] = f(A[n], \psi[n])$$

$$\psi[n + 1] = f(\psi[n], A[n])$$

Diagrama de estados

Representación de la evolución del estado del sistema bajo ISI

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1], A[n-K]]^T$$

$$\psi[n+1] = [A[n], A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1]]^T$$

Diagrama de estados

Representación de la evolución del estado del sistema bajo ISI

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1], A[n-K]]^T$$

$$\psi[n+1] = [A[n], A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1]]^T$$

- Hay M^K posibles estados

Diagrama de estados

Representación de la evolución del estado del sistema bajo ISI

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1], A[n-K]]^T$$

$$\psi[n+1] = [A[n], A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1]]^T$$

- Hay M^K posibles estados
- M flechas salen de cada estado, una por cada posible valor de $A[n]$
- M flechas llegan a cada estado, todas asociadas al mismo valor de $A[n]$

Diagrama de estados

Representación de la evolución del estado del sistema bajo ISI

$$\psi[n] = [A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1], A[n-K]]^T$$

$$\psi[n+1] = [A[n], A[n-1], A[n-2], \dots, A[n-K+1]]^T$$

- Hay M^K posibles estados
- M flechas salen de cada estado, una por cada posible valor de $A[n]$
- M flechas llegan a cada estado, todas asociadas al mismo valor de $A[n]$
- Cada flecha se etiqueta con la siguiente información

$$A[n] | o[n]$$

i.e., valor del símbolo actual que fuerza la transición entre estados, y la salida sin ruido que se genera en ese caso

Diagrama de estados: Ejemplo A

- $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$

- ▶ Salida sin ruido

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1]$$

- ▶ Estado

$$\psi[n] = A[n-1], \quad \psi[n+1] = A[n]$$

- ▶ Diagrama de estados ψ y transiciones $A[n]|o[n]$

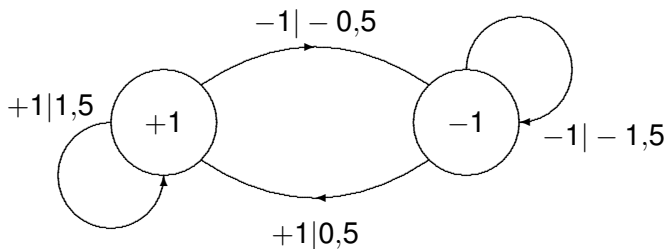


Diagrama de estados: Ejemplo B

- $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$
- $o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2]$
- $\psi[n] = [A[n-1], A[n-2]]^T$, $\psi[n+1] = [A[n], A[n-1]]^T$

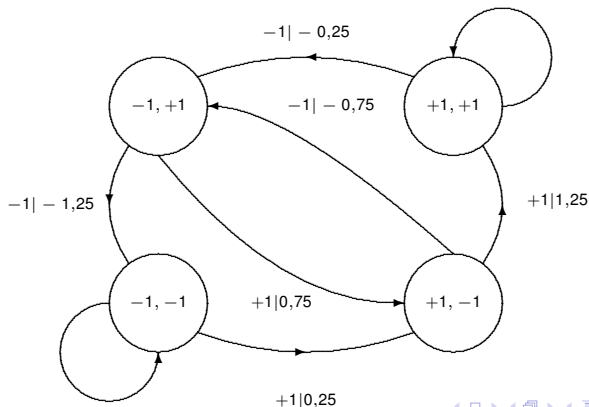


Diagrama de rejilla: Ejemplo A

- Representa la evolución del estado a lo largo del tiempo
- Ejemplo: $A[n] \in \{\pm 1\}$, $p[n] = \delta[n] + 0,5\delta[n - 1]$, memoria $K = 1$
- Estado: $\psi[n] = A[n - 1]$
- Etiquetas: $A[n]$, $o[n] = A[n] + 0,5A[n - 1]$

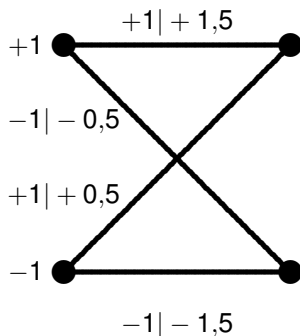


Diagrama de rejilla: Ejemplo B

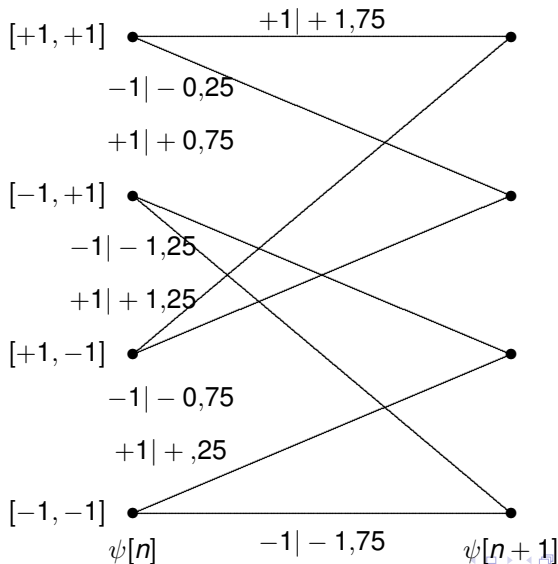
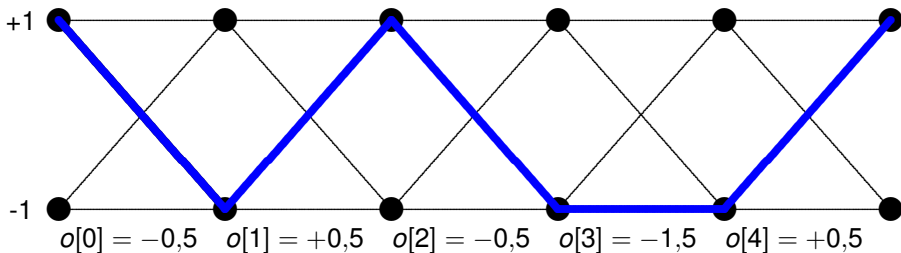


Diagrama de rejilla: Representación de una secuencia A

- Una secuencia se puede representar como un camino a través de la rejilla
 - ▶ Estado inicial = $\psi[0] = +1$
 - ▶ Ejemplo $\mathbf{A} = [-1, +1, -1, -1, +1]$

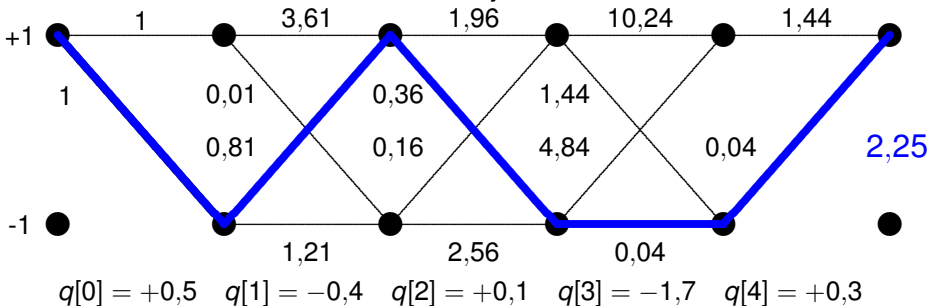


Detección de secuencias ML usando la rejilla

- Secuencia más verosímil

$$\hat{a} = \arg \min_{a_i} \sum_{n=0}^{K+L-1} \left| q[n] - \underbrace{\sum_{k=0}^K p[k] a_i[n-k]}_{o_i[n]} \right|^2$$

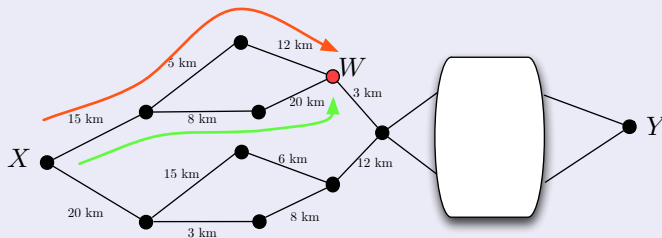
- ▶ **Nuevas** etiquetas en la rejilla: **métrica de rama** $|q[n] - o_i[n]|^2$
- ▶ **Verosimilitud** para una secuencia: **suma** de las métricas de rama de su camino a través de la rejilla



Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- \hat{A} se corresponde con el camino de menor métrica.
- Hay M^L caminos. ¿Debemos calcular la métrica para todos los caminos? (Complejidad $\mathcal{O}(M^L)$). ¡No!

Teorema importante: Camino más corto entre puntos de un mapa



Si el camino más corto entre X y Y pasa por W, seguro sigue la trayectoria **roja** (Cuidado! esto no quiere decir que el camino más corto pase por W...).

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas
 - ▶ **Métrica de rama:** define la métrica asociada a cada rama

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas
 - ▶ **Métrica de rama:** define la métrica asociada a cada rama
 - ▶ **Métrica de camino:** suma de las métricas de rama del camino

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas
 - ▶ **Métrica de rama:** define la métrica asociada a cada rama
 - ▶ **Métrica de camino:** suma de las métricas de rama del camino
 - ▶ **Camino superviviente para un nodo:** el camino que llega

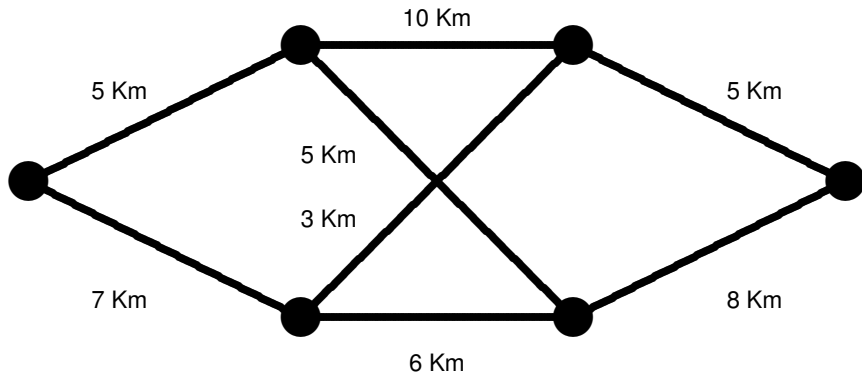
Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas
 - ▶ **Métrica de rama:** define la métrica asociada a cada rama
 - ▶ **Métrica de camino:** suma de las métricas de rama del camino
 - ▶ **Camino superviviente para un nodo:** el camino que llega al nodo con la menor métrica
 - ▶ **Métrica acumulada de un nodo:** métrica de su camino superviviente

Secuencia ML: Algoritmo de Viterbi

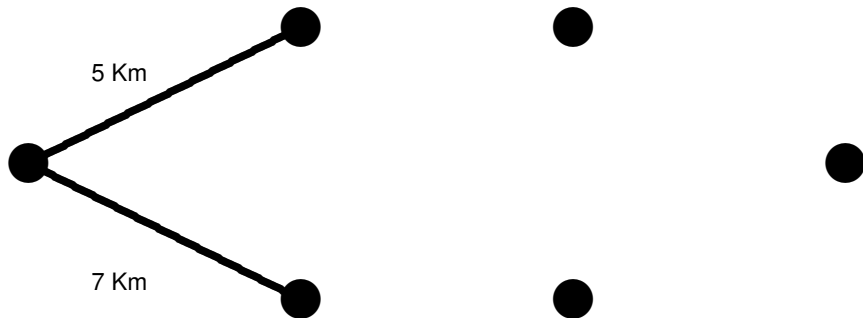
- **Objetivo:** Evaluación de la métrica de verosimilitud para las M^L posibles secuencias para obtener la secuencia ML:
 - ▶ El camino más corto = la secuencia de menos error
 - ▶ Computacionalmente costoso encontrar la métrica de los M^L posibles caminos.
- Obtención eficiente de la secuencia ML: Algoritmo de **Viterbi**
 - ▶ Cálculo eficiente del camino más corto a través de una rejilla
- Principios básicos del algoritmo
 - ▶ Una rejilla consta de una serie de nodos (estados en nuestro problema) y ramas uniendo nodos
 - ▶ Un camino consiste en una secuencia conexa de ramas
 - ▶ **Métrica de rama:** define la métrica asociada a cada rama
 - ▶ **Métrica de camino:** suma de las métricas de rama del camino
 - ▶ **Camino superviviente para un nodo:** el camino que llega al nodo con la menor métrica
 - ▶ **Métrica acumulada de un nodo:** métrica de su camino superviviente

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo



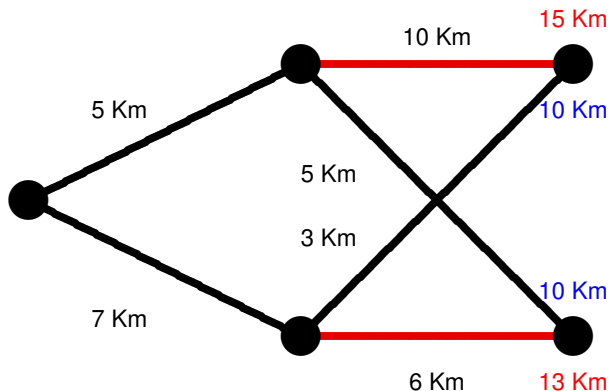
Objetivo: llegar del origen al destino recorriendo la menor distancia.

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo



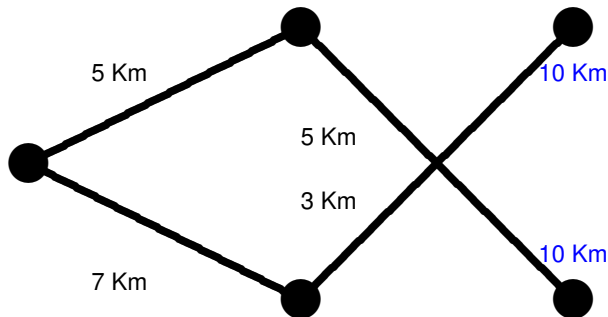
- Recorremos la rejilla de izquierda a derecha dejando un solo camino entrante a cada nodo.

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo



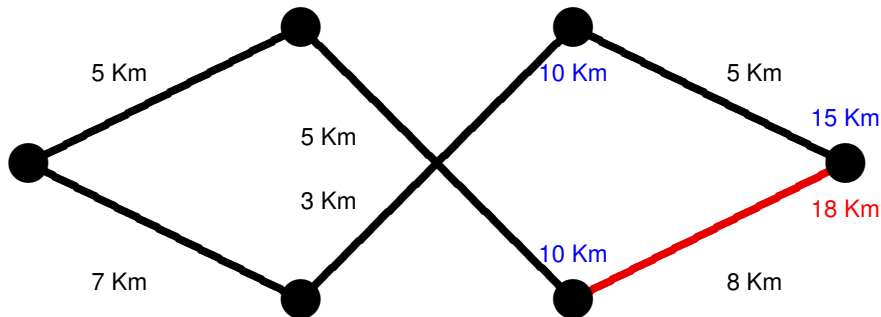
- Recorremos la rejilla de izquierda a derecha dejando un solo camino entrante a cada nodo.
- Cuando llega más de una rama a un nodo, nos quedamos con el camino de **menor métrica** (camino superviviente), **eliminando el resto**

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo



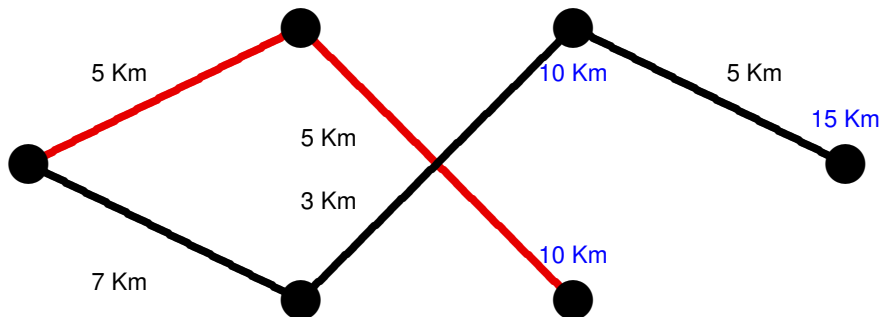
- Recorreremos la rejilla de izquierda a derecha dejando un solo camino entrante a cada nodo.
- Cuando llega más de una rama a un nodo, nos quedamos con el camino de **menor métrica** (camino superviviente), **eliminando el resto**

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo



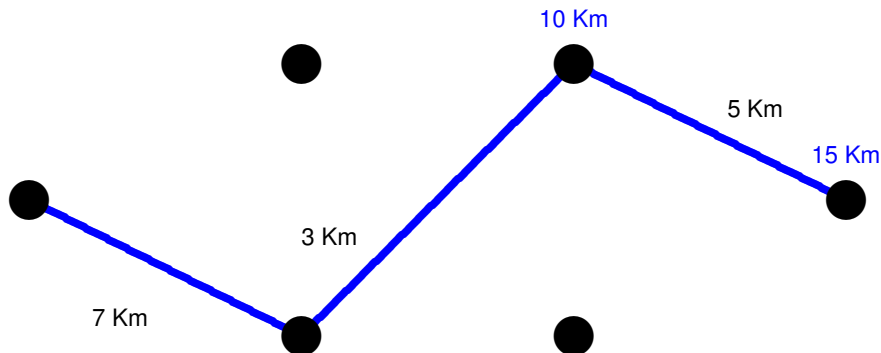
- Recorremos la rejilla de izquierda a derecha dejando un solo camino entrante a cada nodo.
- Cuando llega más de una rama a un nodo, nos quedamos con el camino de **menor métrica** (camino superviviente), **eliminando el resto**

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo



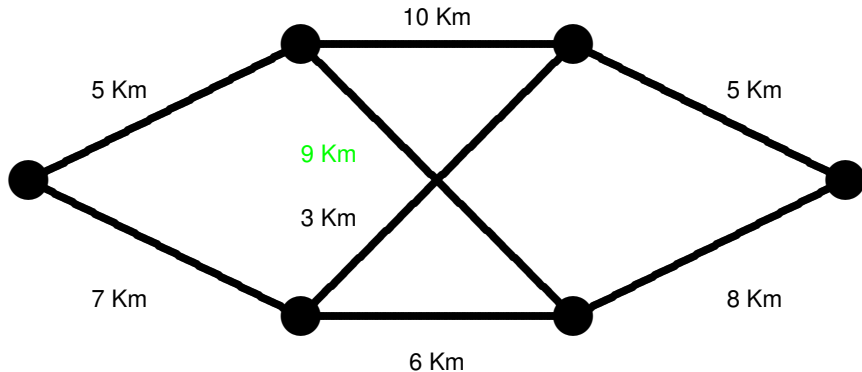
- Una vez eliminada una rama, debemos **eliminar el camino** que llegaba hasta esa rama.
- **Importante:** Olvidamos el camino de la rama borrada, pero si los caminos que aún perduran comparten alguna rama, esas ramas permanecen.

Algoritmo de Viterbi: Ejemplo

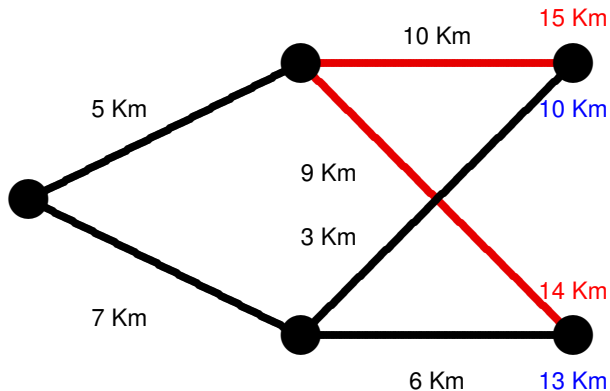


- Una vez eliminada una rama, debemos **eliminar el camino** que llegaba hasta esa rama.
- **Importante:** Olvidamos el camino de la rama borrada, pero si los caminos que aún perduran comparten alguna rama, esas ramas permanecen.

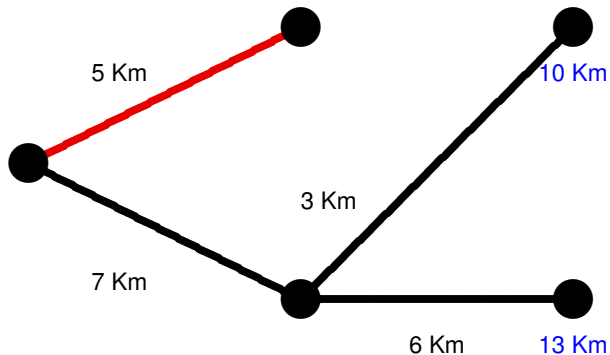
Algoritmo de Viterbi: Ejemplo II



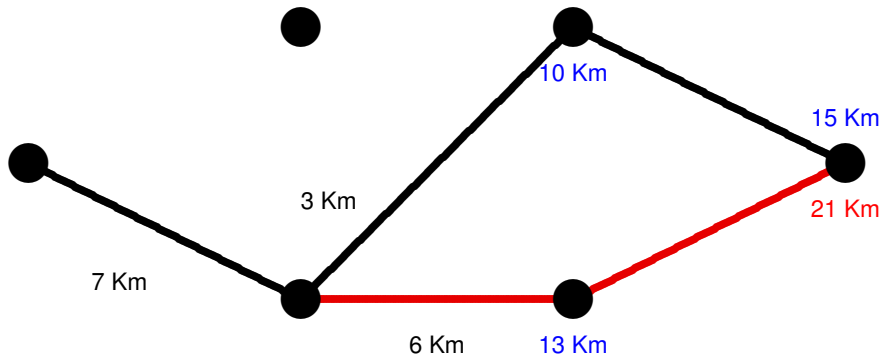
Algoritmo de Viterbi: Ejemplo II



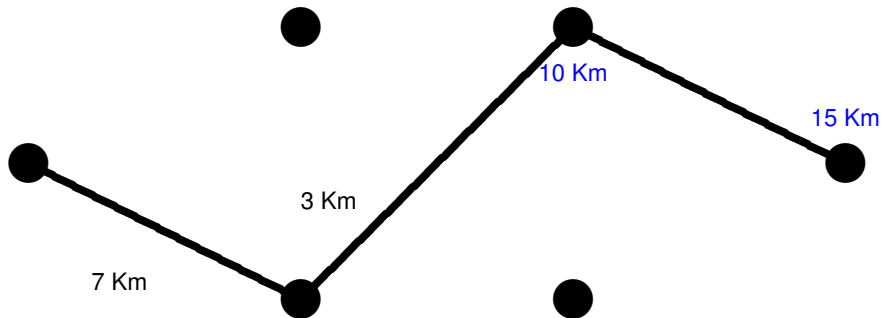
Algoritmo de Viterbi: Ejemplo II



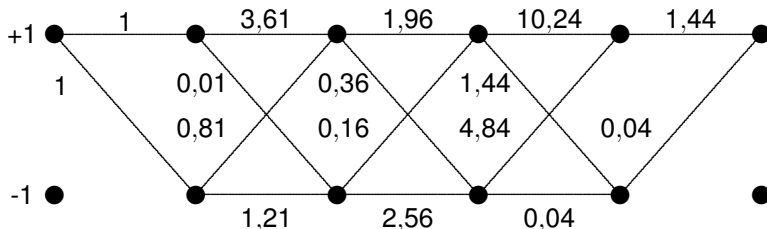
Algoritmo de Viterbi: Ejemplo II



Algoritmo de Viterbi: Ejemplo II

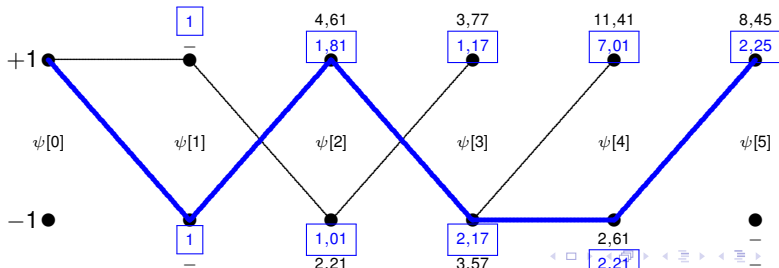


Algoritmo de Viterbi: Ejemplo III

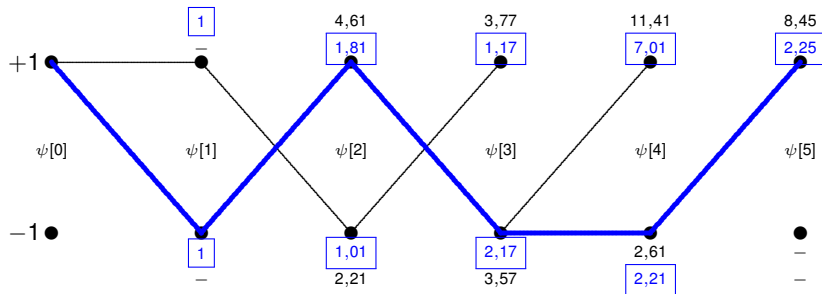


$$q[0] = +0,5q[1] = -0,4q[2] = +0,1q[3] = -1,7q[4] = +0,3$$

- Procedimiento: calcular los caminos supervivientes y las métricas acumuladas en cada estado



Algoritmo de Viterbi: Ejemplo III



- En azul, la métrica del camino superviviente (la menor).
- El camino en azul corresponde a la secuencia de mayor probabilidad (ML)
 - ▶ Este camino indica que los símbolos estimados son los siguientes:

$$\hat{A}[0] = -1, \hat{A}[1] = +1, \hat{A}[2] = -1, \hat{A}[3] = -1$$

Ejercicio 1

Se tiene una modulación $A[n] \in \{+1, -1\}$ transmitida sobre un canal dado por $p[n] = 0,7\delta[n] - 0,5\delta[n - 1]$. En el receptor se observa la siguiente secuencia: $\{q[0], \dots, q[5]\} = \{0,3, -0,4, 0,8, -0,1, -0,6, 0,5\}$. El estado del sistema al comenzar la transmisión es $\Psi[0] = -1$, es decir, $A[-1] = -1$.

- Calcule el número de estados del sistema
- Calcule el número de posibles secuencias
- Dibuje y calcule la rejilla básica del sistema
- Estime mediante el algoritmo de Viterbi cuál es la secuencia de $A[n]$ más probable (ML)

Ejercicio 2

Se tiene una modulación $A[n] \in \{+1, -1\}$ transmitida sobre un canal dado por $p[n] = \delta[n] + 0,5\delta[n-1] + 0,25\delta[n-2]$. En el receptor se observa la siguiente secuencia:

$\{q[0], \dots, q[5]\} = \{0,5, -0,4, 0,1, -1,7, 1,2, 0,3\}$. El estado del sistema al comenzar la transmisión es $\Psi[0] = \Psi[6] = [-1, -1]$, es decir, $A[-2] = A[-1] = A[4] = A[5] = -1$.

- Calcule el número de estados del sistema
- Calcule el número de posibles secuencias
- Dibuje y calcule la rejilla básica del sistema
- Estime mediante el algoritmo de Viterbi cuál es la secuencia de $A[n]$ más probable (ML)

- **Almacenamiento:** En cada instante de tiempo hay que almacenar M^K métricas acumuladas y hacer M nuevos cálculos de métricas por cada una.
- **Complejidad:** La complejidad total es LM^{K+1} . **Lineal en L!!**
 - ▶ En régimen permanente, hay M^K estados.
 - ▶ De cada estado salen M caminos y entran M caminos.
 - ▶ L iteraciones del proceso.

● Probabilidades de error

- ▶ $Pr\{\text{sec. errónea}\}$: Tiende a 1 cuando L tiende a infinito.
- ▶ Nos interesa saber la $P_e = Pr\{\text{suceso erróneo}\} \cdot \hat{w}$, donde \hat{w} es el número medio de símbolos erróneos cada vez que hay un suceso erróneo.
- ▶ Se puede demostrar que para SNR suficientemente elevada, el rendimiento del algoritmo de Viterbi en canales con ISI es equivalente al del detector símbolo a símbolo en un canal sin ISI¹.

¹A. Artés, *et al.*: Comunicaciones Digitales, sección 6.2.3.