

Física Cuántica. 3º Físicas. Grupo 34
Curso 2000-2001. Examen Final. 2 Junio 2001



PROBLEMA (6 puntos)

Considérese una partícula de masa m y un potencial unidimensional

$$V(x) = -\lambda \delta(x), \quad \lambda > 0.$$

- Calcular las energías de los estados ligados. ¿Cuántos estados ligados pueden existir? ¿Depende esto del valor de λ ?
- Determinar la función de onda normalizada del estado fundamental y evaluar la relación de indeterminación $\Delta x \Delta p$. Comentar el resultado. ¿Qué se puede decir de $\Delta E \Delta t$?
- Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión de una partícula con momento bien definido que incide en este potencial desde $x = -\infty$. ¿Para qué valor de la energía de la partícula la probabilidad de que se transmita o se refleje es la misma? Comentar el resultado.

[Ayuda: Para el cálculo de las condiciones de continuidad, integrar la ecuación de Schrödinger en un entorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $x = 0$, y luego hacer $\varepsilon \rightarrow 0$.]

$$\int dx x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2}{a} x + \frac{2}{a^2} \right)$$

CUESTIONES (4 puntos)

La expresión relativista no da buenos resultados

- Un fotón, un electrón y un neutrón tienen energías de 10 keV, 98 eV y 0.053 eV, respectivamente. Calcular las longitudes de onda de de Broglie asociadas a cada partícula. ¿Cómo determinarías la naturaleza corpuscular y ondulatoria de cada una?
- En un experimento Compton se hace incidir un haz monocromático de rayos X de longitud de onda λ sobre un cristal de grafito y se observan, a 90° del haz incidente, dos picos de intensidad similar para longitudes de onda λ y $\lambda + \lambda_c$, donde $\lambda_c = h/m_e c$ es la longitud de onda Compton del electrón. ¿Cuál es el origen de cada uno de los picos?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow effect is visible beneath the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



FUNDACIÓN GENERAL
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

CURSOS DE VERANO

FUNDACIÓN GENERAL DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

El Escorial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E \psi$$



$$\alpha^2 = \frac{2m^2 \lambda^2}{\hbar^2} \Rightarrow \frac{m \lambda}{\hbar^2} = \alpha$$

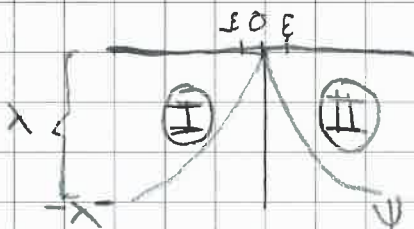
Junio 2001

Problema

Masa m , $V(x) = -\lambda \delta(x)$, $\lambda > 0$

a) Queremos calcular los estados ligados.

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$



$$\text{I } \psi_I = A_I e^{\alpha x} + B_I e^{-\alpha x}$$

$$\text{II } \psi_{II} = A_{II} e^{\alpha x} + B_{II} e^{-\alpha x}$$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow B_{II} = A_I = A$$

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A e^{\alpha x} & \rightarrow \psi_I(x) = A \alpha e^{\alpha x} \\ \psi_{II}(x) = A e^{-\alpha x} & \rightarrow \psi_{II}(x) = A \alpha x e^{-\alpha x} \end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x)\psi = E\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi'' dx - \lambda \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi \delta(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\psi dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi'_{II}(0) - \psi'_{I}(0)) - \lambda \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi'_{II}(0) - \psi'_{I}(0) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2} \psi(0)$$

$$\Rightarrow 2A\alpha = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2} A \Rightarrow \hbar^2 \alpha^2 = m\lambda^2 \Rightarrow 2mE = \frac{m\lambda^2}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

Un solo estado. No depende de λ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\psi_{II}(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^0 \alpha e^{\alpha x} x dx + \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} x dx$$

$$* \int_{-\infty}^0 x e^{\alpha x} dx = \left[\frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} \right]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{\alpha^2}$$

$u=x \Rightarrow du=dx$
 $dv=e^{\alpha x} dx \Rightarrow v=\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

$$* \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = +\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\langle x \rangle = 0 \quad (\text{se podría ver por simetría})$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^0 \alpha e^{\alpha x} x^2 dx + \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} x^2 dx$$

$$* \int_{-\infty}^0 x^2 e^{\alpha x} dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} \left(x^2 - \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$* \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2} \left(x^2 + \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$* \int_{-\infty}^0 \alpha e^{\alpha x} (-i\hbar \alpha x) e^{\alpha x} dx = \int_{-\infty}^0 i\hbar \alpha^2 x e^{2\alpha x} dx = \frac{i\hbar \alpha^2}{2} \left[\frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha} \right]_{-\infty}^0 = \frac{i\hbar \alpha^2}{4}$$

$$= -\frac{i\hbar \alpha^2}{2}$$

$$\downarrow \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} (i\hbar \alpha x) e^{-\alpha x} dx = -i\hbar \alpha^2 \int_0^{\infty} x e^{-2\alpha x} dx = \frac{i\hbar \alpha^2}{4}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



FUNDACIÓN GENERAL
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

CURSOS DE VERANO

FUNDACIÓN GENERAL DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



El Escorial

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \alpha^2$$

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}$$

$$\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \hbar^2 \alpha^2 \Rightarrow \Delta p = \hbar \alpha$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

(Verifica $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$) ✓

$$\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v \Delta t$$

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta E = \Delta p \cdot v \Rightarrow \Delta p = \frac{\Delta E}{v}$$

c) Momento bien definido, $\Delta p = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cuestiones

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

1. $E_\gamma = 10 \text{ keV}$; $E_e = 98 \text{ eV}$; $E_n = 0,053 \text{ eV}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\hbar k} \quad E = \hbar \omega$$

$$E_\gamma^2 = m_\gamma^2 c^4 + p_\gamma^2 c^2 = \frac{h^2 c^2}{\lambda_\gamma^2} \Rightarrow \lambda_\gamma = \frac{hc}{E_\gamma} \Rightarrow \lambda_\gamma = 124 \text{ \AA}$$

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e \lambda_e^2} \Rightarrow \lambda_e = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e E_e}} \Rightarrow \lambda_e = 175 \text{ \AA}$$

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m_n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}} \Rightarrow \lambda_n = 124 \text{ \AA}$$

Para determinar la naturaleza ondulatoria se podrían hacer interferencias de Bragg en una red cristalina con la distancia interplanar adecuada ($\sim \text{\AA}$).

Para la naturaleza corpuscular un experimento de efecto fotoeléctrico con algún metal para γ . Para los otros, por el rango energético, quizá un efecto Compton con un fotón.

2. Rayos X (λ), $\theta = 90^\circ$ λ y $\lambda + \lambda_c$; $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$

En el grafito los electrones se encuentran fundamentalmente libres (aunque algunos ligados a los átomos). Siendo así:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

por tanto $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ no, por tanto no hay dispersión Compton.



FUNDACIÓN GENERAL
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

CURSOS DE VERANO

FUNDACIÓN GENERAL DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



El Escorial

3. Átomo muónico con μ^+ y μ^- con $m_\mu = 206,77 m_e$. Pro. indeterminación radio y energía del estado fundamental.

Dr. Apunti

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow effect is visible beneath the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**