



# Facultad de Informática

## Grado en Ingeniería Informática

### Lógica



#### BLOQUE 1: LÓGICA PROPOSICIONAL

# Tema 7: Conceptos Metalógicos

Profesor: Javier Bajo

[jbajo@fi.upm.es](mailto:jbajo@fi.upm.es)



# Introducción.

2/15

## Estructura de la asignatura

Bloque 1  
Lógica Proposicional



Bloque 2  
Lógica de Primer Orden



# Lógica.



## □ Bloque I

**Tema 1**  
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

**Tema 2**  
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Representación

**Tema 3**  
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

**Tema 4**  
Cálculo de deducción natural proposicional

Razonamiento

**Tema 5**  
Forma clausular

**Tema 6**  
Cálculo de resolución proposicional

Computación

**Tema 7**  
Conceptos metalógicos fundamentales de los sistemas formales proposicionales

Propiedades



# Introducción.

4/8

- Si afirmo  $A_1$  y  $A_2$  y ...  $A_n$ , ¿podría afirmar también  $B$ ?
  - Hemos visto **dos tipos de técnicas** para analizar la corrección de argumentaciones representadas con lenguajes formales:
    - ✦ **Análisis semántico**: Si siempre que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son ciertos,  $B$  también lo es, la argumentación es correcta ( $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$ )
    - ✦ **Cálculo deductivo**: Si partiendo de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  como premisas puedo construir una prueba para  $B$  (usando las reglas de inferencia de la deducción natural), la argumentación es correcta ( $T[A_1, A_2, \dots, A_n] \vdash B$ )
  - Pero queda una cuestión pendiente:
    - ✦ ¿Siempre que  $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$  también se cumple  $T[A_1, A_2, \dots, A_n] \vdash B$ ?
    - ✦ ¿Siempre que  $T[A_1, A_2, \dots, A_n] \vdash B$  también se cumple  $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$ ?



# Introducción.

5/8

## □ ¿Qué es la Metalógica?

- La metalógica estudia los lenguajes lógicos y desarrolla propiedades de estos sistemas, tales como completud, consistencia, decibilidad, etc.
  - *Validez* (corrección): todas las fórmulas que se pueden demostrar en el sistema, son válidas
  - Un sistema lógico tiene la propiedad de ser *consistente* cuando no es posible deducir una contradicción dentro del sistema.
  - Se dice de un sistema lógico que es *decidable* cuando, para cualquier fórmula dada en el lenguaje, siempre se puede saber si es demostrable o no en el sistema.
  - *Completud*: Todas las fórmulas válidas se pueden demostrar.



# Propiedades formales.

6/8

- ❑ Un sistema formal establece una relación de deducibilidad ( $\vdash$ ) entre fórmulas de un lenguaje formal.
- ❑ Tiene interés estudiar diversas propiedades del sistema formal, como son:
  - **Validez**(corrección): Un sistema formal (p. ej. el cálculo de deducción natural, en adelante **T**) es válido cuando toda fórmula deducida en él es una fórmula válida:

$$T \vdash A \Rightarrow \models A$$

- Validez proposicional: una fórmula proposicional es válida (tautológica) cuando es verdadera para toda asignación de verdad (valoración) de sus proposiciones.

- **Consistencia.**

- Un sistema formal es consistente sii no puede deducirse de él ninguna contradicción (e.d. fórmulas con el esquema  $A \wedge \neg A$ )

$$T \not\vdash F \wedge \neg F \quad (F \text{ metavariante sobre fórmulas})$$

**Validez**  $\Rightarrow$  **Consistencia** pero sin embargo **Consistencia**  $\neq$  **Validez**



# Propiedades formales.

7/8

- **Completud**

- Un sistema formal es completo cuando toda fórmula válida puede deducirse en él:

$$\models A \Rightarrow T \vdash A$$

- Es habitual enlazar validez y completud en un único teorema de completud:

$$\models A \Leftrightarrow T \vdash A$$

- **Decidibilidad**

- En general, un problema es **decidible** sii hay un algoritmo que lo resuelve.

- En un sistema formal, hay dos problemas centrales:

- ¿  $T[\Gamma] \vdash A$ ?                      (¿A es deducible?)

- ¿  $T[\Gamma] \models A$ ?                      (¿A es válida?)



# Propiedades formales.

8/8

- ❑ La **Lógica Proposicional** puede sistematizarse en sistemas formales que sean:
  - *Válidos, Consistentes y Completos.*
  - *Decidibles para los problemas de validez (tautologicidad) y deducibilidad.*