TEMA 2

FUNCIONES COMPLEJAS: LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

1.1 Funciones complejas

Una **función compleja** f definida sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una correspondencia entre Ω y $\mathbb{C}$, denotada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, que a cada $z \in \Omega$ le asocia un único número complejo que se llama imagen por f de z y se denota $f(z)$.

- **Dominio de f:** Ω. Si no se especifica el dominio se entiende que es

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists w \in \mathbb{C} \text{ y } w = f(z) \right\}.$$

- **Imagen o rango de f:** denotado $\mathcal{I}m(f)$ o bien $f(\Omega)$, es el conjunto

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \exists z \in \Omega \text{ y } w = f(z) \right\} = \left\{ f(z) : z \in \Omega \right\}.$$

Si $S \subset \mathrm{Dom}(f)$, se denota $f(S)$ al conjunto $\{f(z) : z \in S\}$.

Expresión de $f(z)$ en las coordenadas cartesianas y polares de z

- Si $w = u + iv$ es la imagen por f de $z = x + iy$ entonces

$$u = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{y} \quad v = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

  y f se expresa en función de las coordenadas cartesianas x, y de z:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

  Luego, $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales de dos variables reales. Se denota $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$.

- Si $z \neq 0$ se expresar $f(z)$ en función de las coordenadas polares ρ, θ de z:

$$f(z) = f(\rho\, e^{i\theta}) = u(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) + iv(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$$

Ejemplos a) $f(z) = z^2$. **b)** $f(z) = \dfrac{1}{z}$. **c)** $f(z) = |z|$.

Suma, producto y cociente de funciones

Dados $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, se definen las siguientes funciones sobre Ω:

- Suma: $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$.
- Producto: $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$.
- Cociente: $(f/g)(z) = f(z)/g(z)$ siempre que $g(z) \neq 0 \; \forall z \in \Omega$.

Composición de funciones

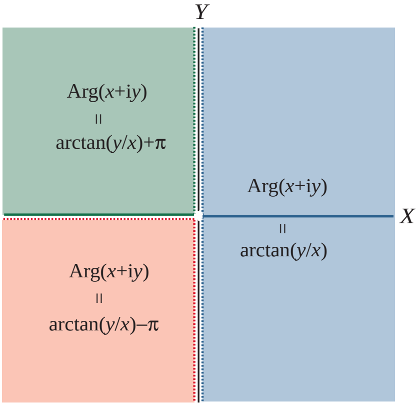
Dados $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$, se define la función composición de f y g como $(g \circ f)(z) = g(f(z)) \;\; \forall z \in \Omega_1$.

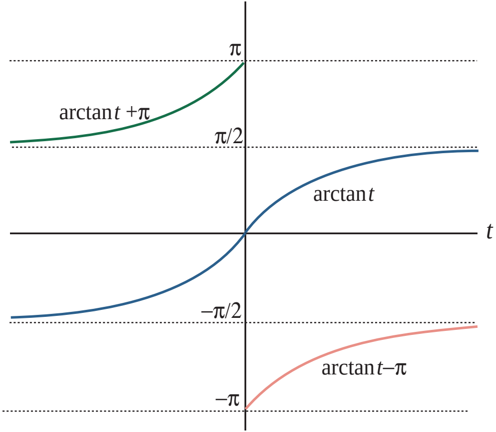
Función inversa

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es es una función inyectiva (i.e. si $f(z_1) = f(z_2)$ entonces $z_1 = z_2$), la función inversa de f, denotada $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$, es la que a cada $w \in f(\Omega)$ le asigna $z \in \Omega$ tal que $f(z) = w$.

Ejemplos: Polinomios, inversión y funciones racionales, $\operatorname{Arg} z$, $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, e^{it},e^{z} y $\operatorname{Log} z$.

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(x+iy) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x=0 \ \wedge \ y<0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} & \text{si } x>0 \\ \pi/2 & \text{si } x=0 \ \wedge \ y>0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x<0 \ \wedge \ y\geq 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & \text{si } x<0 \ \wedge \ y<0 \end{cases}$$





Funciones multivaluadas o multiformes

Una función multivaluada o multiforme F definida sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una correspondencia que a cada $z \in \Omega$ le asigna un conjunto de valores de $\mathbb{C}$; es decir, es una aplicación $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Ejemplos

a) $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definida por $\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $F : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definida por $F(z) = z^{1/2} = \{\pm\sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}\}$.

A partir de una función multivaluada se pueden construir funciones propiamente dichas (univaluadas) eligiendo un único valor para cada z. Por ejemplo,

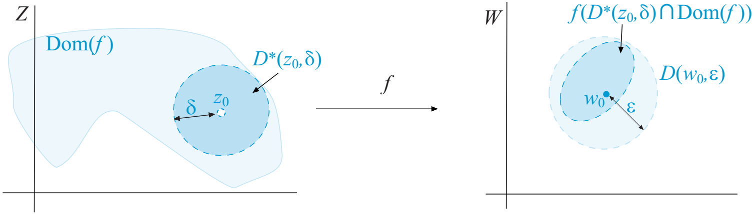
a') Dada $\arg z$, eligiendo para cada $z \in \mathbb{C}^*$ el único valor de $\arg z$ perteneciente a $(-\pi, \pi]$ se obtiene la función $f(z) = \operatorname{Arg} z$.

b') Dada $F(z) = z^{1/2}$ se pueden obtener las funciones $f(z) = \sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}$ y $g(z) = -\sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg} z)/2}$.

1.2 Límites de funciones complejas

Si z_0 es un punto de acumulación del dominio de una función f, se dice que $\boldsymbol{w_0} \in \mathbb{C}$ **es límite de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{z_0}$** si $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $z \in \mathrm{Dom}(f)$ verifica $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Se escribe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $f(D^*(z_0,\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)) \subset D(w_0,\varepsilon)$.



- Si existe el límite de una función compleja en un punto, es único.
- Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}^* \Longrightarrow \forall M \in (0,|w_0|)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > M$ $\forall z \in D^*(z_0,\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplos: Límites de la función constante y de la identidad.

Propiedades de los límites

▶ **Límites y límites relativos** Si existe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$ y z_0 es un punto de acumulación de $A \subset \mathrm{Dom}(f)$, entonces existe el límite de $f|_A$ en z_0, llamado límite de f en z_0 relativo a A y denotado $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f(z)$, y es igual a w_0.

Consecuencia: Si el límite de f en z_0 relativo a un conjunto no existe o dos límites relativos de f en z_0 son distintos, entonces $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Ejemplos: $\nexists \lim\limits_{z\to 0} \bar{z}/z$ y $\nexists \lim\limits_{z\to 0} |z|/z$.

▶ **Teorema (Caracterización del límite)**
Dada $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, existe el límite de f en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega'$ si y sólo si existen los límites de u y v en (x_0, y_0) y se cumple

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \mathrm{Re}\, w_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \mathrm{Im}\, w_0 \end{cases}$$

Ejemplos

a) $\forall z_0 \in \mathbb{C} \begin{cases} \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} e^z = e^{z_0} \end{cases}$

b) Si $x_0 \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \nexists \lim\limits_{z\to x_0} \operatorname{Arg} z \\ \nexists \lim\limits_{z\to x_0} \operatorname{Log} z \end{cases}$

▶ Aritmética de límites[1]

Si existen los límites de f y g en z_0 siendo $v_0, w_0 \in \mathbb{C}$, respectivamente, entonces:

1. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = v_0 + w_0$.
2. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = v_0 \cdot w_0$.
3. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{v_0}{w_0}$ si $w_0 \neq 0$.
4. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |v_0|$. En particular, $\lim\limits_{z\to z_0} |z| = |z_0|$.
5. $\lim\limits_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{v_0}$. En particular, $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$. (Aplicar a $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}$)

[1] En adelante, siempre que se diga que el límite de una función en un punto z_0 es un número complejo se entenderá, aunque no se explicite, que se satisfacen las hipótesis para que la sentencia tenga sentido: z_0 es punto de acumulación del dominio de la función

Consecuencia

1. Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, tal que $a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, entonces $\exists \lim\limits_{z \to z_0} P(z) = P(z_0) \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$.
2. $P(z), Q(z)$ polinomios $\Rightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} P(z)/Q(z) = P(z_0)/Q(z_0)$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $Q(z_0) \neq 0$.

▶ Límite de la composición de funciones

Dadas $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = v_0$ y $\lim\limits_{z \to v_0} g(z) = w_0$ entonces $\lim\limits_{z \to z_0} (g \circ f)(z) = w_0$ siempre que exista $r > 0$ t.q. $f(z) \neq v_0$ si $z \in D^*(z_0, r) \cap \Omega_1$.

▶ Límite nulo por función acotada

Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$ y existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in D^*(z_0, r) \cap \Omega$, entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) g(z) = 0$.

Ejemplos

$\lim\limits_{z \to i} (\bar{z} - i)(z^2 + 2)^2$, $\lim\limits_{z \to 1 + i\sqrt{3}} \dfrac{z^3 + 8}{z - 1 - i\sqrt{3}}$, $\lim\limits_{z \to -i} \exp\left(\dfrac{\bar{z} z^2 \pi + \bar{z}\pi}{iz - 1}\right)$ y $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{(\bar{z} - 1) \operatorname{Log} z}{z - 1}$.

Límites infinitos y límites en el infinito

▶ Límite infinito en un punto

El límite de f en z_0 es ∞, y se denota $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, si $\forall M > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \mathrm{Dom}(f)$ cumple $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z)| > M$.

Ejemplo: $\lim_{z \to 0} 1/z = \infty$. Recuerde que, en el caso real, no existe $\lim_{x \to 0} 1/x$.

▶ Límite finito en el infinito

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ no acotado y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. El límite de f en ∞ es $w_0 \in \mathbb{C}$, y se denota $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$, si $\forall \varepsilon > 0\, \exists k > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z| > k$ entonces $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Ejemplo: $\lim_{z \to \infty} 1/z = 0$.

▶ Límite infinito en el infinito

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ no acotado y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. El límite de f en ∞ es ∞, y se denota $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$, si $\forall M > 0\ \exists k > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z| > k$ entonces $|f(z)| > M$.

Ejemplo: $\lim_{z \to \infty} z^2 = \infty$.

Caracterizaciones de los límites infinitos y en el infinito[2]

Proposición 1.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Ejemplo: $\displaystyle\lim_{z\to -3i} \frac{z^2+9}{(z+3i)^2} = \infty.$

Consecuencia: Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, tal que $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$, y sea z_0 punto de acumulación de Ω. Si $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}^*$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$, entonces $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty$.

Ejemplos

a) Si $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios t. q. $P(z_0) \neq 0$ y $Q(z_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty$.

b) $\lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z-1} = \infty$ (en el caso real no existe el límite).

[2] En adelante, siempre que se diga que el límite de una función en el punto ∞ es número complejo o infinito se entenderá, aunque no se explicite, que se satisfacen las hipótesis para que la sentencia tenga sentido

Proposición 2. Si $w_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, se cumple

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to 0} f(1/z) = w_0$$

Ejemplos

a) Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0$, con $a_j, b_k \in \mathbb{C} \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, siendo $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} a_n/b_n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{|z|^2 + 1}{z + 1}$.

Proposición 3.

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

Ejemplos

a) $\lim\limits_{z \to \infty} P(z) = \infty \quad \forall P(z)$ polinomio no constante.

b) $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios tales que $\mathrm{gr}(P(z)) > \mathrm{gr}(Q(z)) \Longrightarrow \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \infty$.

1.3 Continuidad de las funciones complejas[3]

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que **$f$ es continua en z_0** si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Se dice que f es continua en Ω si lo es $\forall\, z \in \Omega$.

Observación: Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se tiene:

- Si $z_0 \in I(\Omega)$ entonces f es continua en z_0.
- $z_0 \in \Omega'$ entonces: f continua en $z_0 \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

  Si $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ pero es distinto de $f(z_0)$, se puede definir una función $\tilde{f}$ continua en z_0, asignándole este límite, y tal que $f(z) = \tilde{f}(z)\ \ \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

Ejemplos

a) Las funciones constantes y la función identidad son continuas en $\mathbb{C}$.

b) Las funciones Re, Im, $f(z) = |z|$ y $g(z) = e^z$ son continuas en $\mathbb{C}$.

c) Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{C}$ y las racionales en su dominio.

[3] En adelante, si se dice que f es continua en z_0 se entenderá, aunque no se explicite, que z_0 es un punto del dominio de f

Propiedades de las funciones continuas

▶ Teorema (Caracterización de la continuidad)

Sean $f = u + iv$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Se verifica

$$f \text{ es continua en } z_0 \iff u \text{ y } v \text{ son continuas en } (x_0, y_0)$$

Ejemplos: Las funciones Arg y Log son continuas en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

▶ Aritmética de las funciones continuas

$$f \text{ y } g \text{ continuas en } z_0 \Longrightarrow \begin{cases} f + g \text{ es continua en } z_0 \\ f \cdot g \text{ es continua en } z_0 \\ f/g \text{ es continua en } z_0 \text{ si } g(z_0) \neq 0. \end{cases}$$

Ejemplos

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - i}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}\}$.

b) $f(z) = \dfrac{|z| + 2\bar{z}\,\mathrm{Log}\, z}{z^2 + 1}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus (\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \cup \{i, -i\})$.

▶ Continuidad de la composición de funciones

Dadas las funciones $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } z_0 \\ g \text{ es continua en } f(z_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ es continua en } z_0.$$

Ejemplos

a) $f(z) = e^{\bar{z}}$ es continua en $\mathbb{C}$.

b) $f(z) = e^{\frac{z+1}{z}}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) $f(z) = \operatorname{Log}(i - z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{x + i : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$.

Continuidad y funciones multivaluadas

Dada una función multivaluada F, se llama **rama o determinación** de F en un conjunto $\Omega \subset \mathrm{Dom}(F)$ a toda función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifica:

- f es continua en Ω
- $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Ejemplos

a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ la función multivaluada arg permite definir la rama del argumento $\mathrm{Arg}_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ siendo $\mathrm{Arg}_\alpha z$ el único valor en $\arg z \cap (\alpha, \alpha + 2\pi)$. La rama principal del argumento, que se sigue denotando Arg, está definida en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.
$\mathrm{Arg}_\alpha z = \mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z = \mathrm{Arg}_{[\alpha,\alpha+2\pi)} z$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$.

b) La función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$ permite definir sobre el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, las ramas de F

$$f_\alpha(z) = \sqrt{|z|}e^{(i \arg_\alpha z)/2} \quad \text{y} \quad g_\alpha(z) = -\sqrt{|z|}e^{(i \arg_\alpha z)/2} = -f_\alpha(z).$$

Llamaremos a f_α, con $\alpha = -\pi$, rama principal de $z^{1/2}$.

Continuidad y conjuntos compactos y conexos

Proposición 4.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $f(\Omega)$ es un conjunto compacto.

Corolario

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $|f|$ está acotado en Ω.

Proposición 5.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces $f(\Omega)$ es un conjunto conexo.

2.1 Definición y primeras propiedades

Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es **derivable** en $z_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$ si existe el siguiente límite y es un número complejo:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \underset{\text{Notación}}{=} f'(z_0) \leftarrow \text{ derivada de } f \text{ en } z_0$$

Observación: f derivable en $z_0 \iff \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z0} = 0.$

Ejemplos

a) Las funciones constantes son derivables en $\mathbb{C}$ con derivada nula en todo punto.

b) La función identidad es derivable en $\mathbb{C}$ con derivada 1 en todo punto.

c) La función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ningún punto.

Propiedades de las derivadas

▶ Derivabilidad y continuidad

Sean f una función compleja y z_0 un punto interior a su dominio. Se cumple

$$f \text{ es derivable en } z_0 \Longrightarrow f \text{ es continua en } z_0$$

▶ Derivación de suma, producto y cociente de funciones complejas

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto y $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ derivables en $z_0 \in \Omega$. Se verifica

1. $f + g$ es derivable en z_0 siendo $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
2. $f \cdot g$ es derivable en z_0 y $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$.
3. Si $g(z_0) \neq 0$, $1/g$ es derivable en z_0 y $(1/g)'(z_0) = -\dfrac{g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.
4. Si $g(z_0) \neq 0$, f/g es derivable en z_0 y $(f/g)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.

▶ Regla de la cadena.

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$. Si f derivable en $z_0 \in \Omega_1$ y g derivable en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es derivable en z_0 y

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

▶ Derivación de la función inversa.

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto y $z_0 \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es inyectiva, $\exists f'(z_0) \neq 0$, $f(\Omega)$ es abierto y f^{-1} es continua en $f(z_0)$, entonces f^{-1} es derivable en $f(z_0)$ siendo

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Ejemplos

a) Toda función polinómica es derivable en $\mathbb{C}$.

b) Toda función racional es derivable en su dominio.

c) Las funciones Re e Im no son derivables en ningún punto de $\mathbb{C}$.

d) La función $f(z) = |z|^2$ no es derivable en ningún $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sí lo es en $z = 0$.

e) La función $f(z) = |z|$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

2.2 Derivabilidad y ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema (Caracterización de la derivabilidad. Ecs. de Cauchy-Riemann)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. Se cumple

$$f \text{ es derivable en } z_0 \iff \begin{cases} u \text{ y } v \text{ son diferenciables en } (x_0, y_0) \\ \left.\begin{array}{l} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{array}\right\} \text{Ec. de Cauchy-Riemann} \end{cases}$$

Además, si f derivable en z_0 se verifica

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Ejemplos

a) La función $f(z) = e^z$ es derivable $\forall z \in \mathbb{C}$ siendo $f'(z) = f(z)$.

b) La función $f(x + iy) = x^3 + iy^2 + 5$ es derivable en todo punto $z = x + iy$ que tal que $y = 3x^2/2$ y su derivada es $f'(x + iy) = 3x^2$.

c) La función $f(z) = e^{\bar{z}}$ no es derivable en ningún punto.

Teorema (Ecs. de Cauchy-Riemann en coordenadas polares)

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$.
Si $U(\rho, \theta) = u(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$ y $V(\rho, \theta) = v(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, entonces:

$$f \text{ es derivable en } z_0 = \rho_0\, e^{i\theta_0} \Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ y } V \text{ son diferenciables en } (\rho_0, \theta_0) \\ \left.\begin{array}{l} \rho_0\, U_\rho(\rho_0, \theta_0) = V_\theta(\rho_0, \theta_0) \\ U_\theta(\rho_0, \theta_0) = -\rho_0 V_\rho(\rho_0, \theta_0) \end{array}\right\} \text{Ecs. de Cauchy-Riemann en coord. polares} \end{cases}$$

Además, si f derivable en z_0 se verifica

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}\left(U_\rho(\rho_0, \theta_0) + iV_\rho(\rho_0, \theta_0)\right)$$

Ejemplos

a) La función $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es derivable $\forall z \in \Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ siendo $f'(z) = 1/z$.

b) La rama de $z^{1/2}$ definida por $f_\alpha(z) = \sqrt{|z|}\, e^{(i \operatorname{Arg}_\alpha z)/2}$ es derivable en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{r\, e^{i\alpha} : r \geq 0\}$.

2.3 Derivabilidad de las funciones complejas de variable real

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una función $f : I \to \mathbb{C}$ es **derivable** en $x_0 \in I$ si $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son derivables en x_0. Se denomina derivada de f en x_0, y se denota $f'(x_0)$, al número complejo $u'(x_0) + iv'(x_0)$.

Ejemplo: La función $f(t) = e^{it}$ es derivable $\forall t \in \mathbb{R}$ siendo $f'(t) = ie^{it}$.

Proposición Si f es una función compleja derivable, en el sentido complejo, en un punto x_0 de $\mathbb{R}$, entonces $f|_{\mathbb{R}}$ también es derivable como función de variable real y $f'(x_0) = (f|_{\mathbb{R}})'(x_0)$.

Observación: El recíproco no es cierto. Por ejemplo, $\tilde{f}(z) = \operatorname{Re} z$ no es derivable en ningún punto $z \in \mathbb{C}$, pero $f = f_{|\mathbb{R}}$ es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ pues

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Re} f(x) = x \\ v(x) &= \operatorname{Im} f(x) = 0 \end{aligned}$$

son derivables $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.4 Funciones holomorfas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** en $z_0 \in \Omega$, o z_0 es un **punto regular** de f, si f es derivable en todo punto de un disco $D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Si f es holomorfa en cada $z \in \Omega$ se dice que es holomorfa en Ω. Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ se dice que f es **entera**. Se denota

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa } \}.$$

Observación: Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto, se verifica

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff f \text{ es derivable en } z \; \forall z \in \Omega.$$

Ejemplos

a) Toda función polinómica es entera.

b) La función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

c) La función $f(z) = e^z$ es entera.

d) Dada $f(z) = \operatorname{Log} z$, se verifica $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}\right)$.

e) La rama principal de $z^{1/2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

f) La función $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa en ningún dominio.

g) La función $f(x + iy) = x^3 + iy^2 + 5$ no es holomorfa en ningún dominio.

Proposición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio (abierto y conexo) y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se verifica:

1. $f'(z) = 0 \; \forall z \in \Omega \Longrightarrow f$ constante en Ω.
2. $\operatorname{Re} f$ es constante en $\Omega \Longrightarrow f$ constante en Ω.
3. $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω (en particular, si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$) $\Longrightarrow f$ constante en Ω.
4. $|f|$ es constante en $\Omega \Longrightarrow f$ constante en Ω.

Funciones holomorfas y funciones armónicas

Función armónica: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio. Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es **armónica** en Ω si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ (tiene derivadas parciales hasta el orden 2 y son continuas) y $\forall (x, y) \in \Omega$ se cumple

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad \textbf{(Ecuación de Laplace)}$$

Proposición. Si $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, y $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, entonces u y v son funciones armónicas en Ω

Problema: ¿Dada una función armónica se puede encontrar una función holomorfa de la cuál sea su parte real o imaginaria?

Función armónica conjugada: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Se dice que una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es **armónica conjugada** de u en Ω si $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Observación: Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio, si $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$v \text{ es armónica conjugada de } u \text{ en } \Omega \iff \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

Proposición. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio. Se verifica:

1. v es armónica conjugada de u en $\Omega \iff -u$ es armónica conjugada de v en Ω.
2. Si u armónica conjugada de v en Ω y v armónica conjugada de u en $\Omega \implies u$ y v son constantes en Ω.

Proposición. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio simplemente conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica, entonces existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica conjugada de u en Ω

Observación: Si el dominio Ω no es simplemente conexo, no se puede asegurar la existencia de la conjugada armónica de u. Por ejemplo, dada

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

se cumple

- u es armónica en el dominio $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y no tiene armónica conjugada en dicho dominio.
- u tiene armónica conjugada en todo dominio simplemente conexo $\Omega\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
- $v(x,y)=\operatorname{Arg}(x+iy)$ es armónica conjugada de u en $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0\}$.

Ejemplos

En cada caso determinar:

a) f holomorfa tal que $\operatorname{Re} f(x+iy)=u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

b) f holomorfa tal que $\operatorname{Re} f(x+iy)=u(x,y)=e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$.

c) f holomorfa tal que $\operatorname{Im} f(x+iy)=v(x,y)=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}$.