$$(\bar{u}_1,\bar{u}_2)+(\bar{v}_1,\bar{v}_2)=(\bar{u}_1+\bar{v}_1,\bar{u}_2+\bar{v}_2);\ \forall \bar{u}_1,\bar{v}_1\in E;\ \ \forall \bar{u}_2,\bar{v}_2\in F$$

$$\lambda(\bar{u},\bar{v})=(\lambda\bar{u},\lambda\bar{v});\ \forall\lambda\in K;\ \forall\bar{u}\in E;\ \forall\bar{v}\in F$$

Dicho espacio vectorial se denomina espacio vectorial producto de E y F.

Siendo $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ una base de E y $\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\ldots,\bar{w}_m\}$ una base de F, la dimensión $E\times F$ es $n+m$ y una base de $E\times F$ puede ser:

$$\{(\bar{e}_1,0),(\bar{e}_2,0),\ldots,(\bar{e}_n,0),(0,\bar{w}_1),(0,\bar{w}_2),\ldots,(0,\bar{w}_m)\}$$

8. Aplicaciones Lineales

8.1. Aplicación Lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $f:E\longrightarrow F$ una aplicación.

f es una aplicación lineal si verifica:

$$f(\bar{x}+\bar{y})=f(\bar{x})+f(\bar{y}),\forall\ \bar{x},\bar{y}\in E$$

$$f(\lambda\bar{x})=\lambda f(\bar{x}),\ \forall\lambda\in K,\ \forall\ \bar{x}\in E$$

8.2. Propiedad

f es un homomorfismo o aplicación lineal si y sólo si:

$$f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y})=\lambda f(\bar{x})+\mu f(\bar{y}),\ \forall\lambda,\mu\in K,\ \forall\bar{x},\bar{y}\in E$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

8.3. Propiedades de las Aplicaciones Lineales

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y F, entonces:

$f\left(\bar{0}\right) = \bar{0}$

$\forall \bar{x} \in E, f(-\bar{x}) = -f(\bar{x})$

Si V es un espacio vectorial de E, entonces $f(V)$ es un subespacio vectorial de F. En particular, $f(E)$ recibe el nombre de subespacio imagen de f. Se suele denotar por $Im(f)$.

Si S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial V de E, entonces $f(S)$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial $f(V)$. Por lo tanto, f es sobreyectiva si y sólo si, la imagen de una base B de E, $f(B)$, es un sistema generador de F.

Si V es un subespacio de F, $f^{-1}(V)$ es un subespacio de E.

9. NOMENCLATURA

Sea $f: E \longrightarrow F$ un homomorfismo:

Si $E = F$, a f se le denomina endomorfismo.

Si f es inyectivo, se denomina monomorfismo.

Si f es biyectivo recibe el nombre de isomorfismo

Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

9.1. Núcleo

Se llama núcleo de una aplicación lineal f, designándose $Ker(f)$ ó $N(f)$, al siguiente subconjunto de E:

$$Ker(f) = \{\bar{x} \in E \ / \ f(\bar{x}) = \bar{0}\}.$$

9.2. Propiedades del Núcleo

Las principales propiedades del núcleo son las siguientes:

$Ker(f)$ es un subespacio vectorial de E.

f es un homomorfismo inyectivo si y sólo si $Ker(f) = \{\bar{0}\}$

$Ker(f) = \{\bar{0}\}$ si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de E es un sistema libre de F.

9.3. Propiedad.

Si la restricción de f a un subespacio V de E es inyectivo y S es un sistema libre de V entonces $f(S)$ es un sistema libre del subespacio $f(V) \subset F$.

9.4. Rango de una aplicación lineal

Una aplicación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base de E.

Si $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base de E y conocemos $\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \ldots, f(\bar{e}_n)\}$, vectores de F, la imagen de cualquier vector $\bar{x}$ de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la base B será:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$f(\overline{x}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ f(\overline{e}_i).$$

IMPORTANTE: Podría parecer que no siempre se expresa el homomorfismo por medio de las imágenes de una base, pero dicha información siempre se puede obtener y esto será de utilidad para enlazar homomorfismos y matrices como veremos a continuación.

10. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ una base de E, $B_F' = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m\}$ una base de F.

Sea $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i$, $\quad f(\overline{x}) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \ f(\overline{e}_i) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{u}_j$. Si:

$$\left.\begin{array}{lllll} f(\overline{e}_1) = & a_{11}\overline{u}_1 & +a_{21}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m1}\overline{u}_m \\ f(\overline{e}_2) = & a_{12}\overline{u}_1 & +a_{22}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m2}\overline{u}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(\overline{e}_n) = & a_{1n}\overline{u}_1 & +a_{2n}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{mn}\overline{u}_m \end{array}\right\}.$$

(1) Por las propiedades de aplicación lineal.

(2) Ya que $f(\overline{x})$ es un vector de F se podrá poner como combinación lineal de la base B_F'.

Se tiene que: $\overline{y} = P\overline{x}$, siendo:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$\overline{y}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $f(\overline{x})$ en la base $B_F^{'}$;

$\overline{x}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $\overline{x}$ en la base B;

P es la matriz del homomorfismo en las bases B y $B_F^{'}$ (o con respecto a las bases B y $B_F^{'}$).

Las columnas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $f(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ respecto de la base $B_F^{'}$. P es una matriz de orden $m \times n$.

Fijadas las bases B y $B_F^{'}$, la matriz del homomorfismo es única.

NOTA: Si utilizamos matrices fila para las componentes de $\overline{x}$ y de $f(\overline{x})$, la matriz del homomorfismo sería la traspuesta de la obtenida anteriormente.

11. OPERACIONES CON HOMOMORFISMOS Y SUS MATRICES ASOCIADAS.

Sean E y F dos espacios vectoriales, B una base de E, $B^{'}$ una base de F. Sean f y g dos homomorfismos de E en F, siendo sus matrices sociadas (respecto a las bases B y $B^{'}$), A y C respectivamente.

Al homomorfismo $f + g : E \longrightarrow F$ definido por:

$$(f+g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x}), \ \forall \overline{x} \in E,$$

le corresponde la matriz $A + C$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Al homomorfismo $\lambda \cdot f : E \longrightarrow F$,(producto escalar), definido por:

$$(\lambda \cdot f)(\bar{x}) = \lambda \ f(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in E,$$

le corresponde la matriz λA.

Con estas dos operaciones, el conjunto de homomorfismos entre los espacios vectoriales E y F, denotado por $L(E,F)$, tiene estructura de espacio vectorial, isomorfo al espacio vectorial de las matrices $M_{m\times n}$.

Por tanto, la dimensión del espacio $L(E,F)$ es $m \cdot n$.

NOTA: Fijada una matriz $A \in M_{m\times n}$, siempre es posible encontrar una base B_E en E y una base B_F en F, respecto de las cuales la matriz asociada a la aplicación linea $f : E \longrightarrow F$ es A.

Sean E un espacio vectorial de dimensión n y B una base de E, F un espacio vectorial de dimensión m y B_F una base de F, y G un espacio vectorial de dimensión p y B_G una base de G.

Se consideran las aplicaciones lineales siguientes: $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ y sean A la matriz asociada a f, y C la matriz asociada a g, en las bases dadas. Entonces la aplicación compuesta $g \circ f : E \longrightarrow G$, definida por $(g \circ f)(\bar{x}) = g\left[f(\bar{x}) \right]$, tiene como matriz asociada a $C \cdot A$, en las bases B_E y B_G.

Si un homomorfismo $f : E \longrightarrow E$, de matriz asociada A, tiene inverso, la matriz asociada a $f^{-1} : E \longrightarrow E$ es A^{-1}.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

12. CAMBIOS DE BASES

Al efectuarse cambios de base en E, en F o en ambos, la matriz del homomorfismo queda modificada obteniéndose la nueva matriz por medio de las fórmulas del cambio de base.

Si tenemos una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ de matriz asociada A respecto a una base B_E en E y una base B_F en F, veamos cómo queda la matriz asociada a la aplicación lineal si en E considero una nueva base B_E' y en F una nueva base B_F'.

Sea P la matriz cambio de base de B_E' en B_E en el espacio E.

Sea Q la matriz cambio de base de B_F' en B_F en el espacio F.

Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ P\uparrow & & \downarrow Q^{-1} \\ E_{B_E'} & \xrightarrow{A'} & F_{B_F'} \end{array}$$

Se cumple que: $A' = Q^{-1}AP$

Si sólo se realizara el cambio de base en el espacio vectorial E, tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ P\uparrow & & \downarrow \mathbf{I} \\ E_{B_E'} & \xrightarrow{A'} & F_{B_F} \end{array}$$

En este caso se cumple que: $A' = AP$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Si sólo se realizara el cambio de base en el espacio vectorial F, tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ \mathbf{I}\uparrow & & \downarrow Q^{-1} \\ E_{B_E} & \xrightarrow{A'} & F_{B'_F} \end{array}$$

En este caso se cumple que: $A' = Q^{-1}A$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.