

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

(IT-LADE, IT-ITIS, BILINGÜE)

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

«ANÁLISIS VECTORIAL»

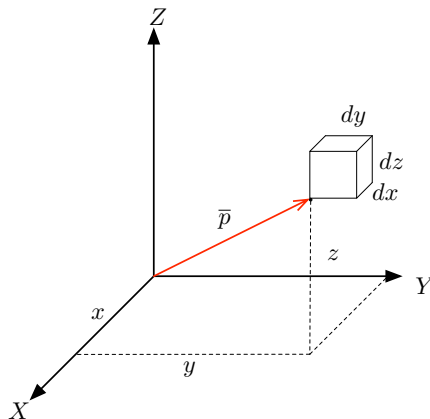
CURSO ACADÉMICO 08/09

1. Sistemas de coordenadas

Dependiendo de la geometría del problema se utilizará uno de los siguientes sistemas de coordenadas:

- Coordenadas cartesianas: (x, y, z) .
- Coordenadas cilíndricas: (ρ, ϕ, z) .
- Coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ) .

1.1. Coordenadas cartesianas



Un punto \bar{p} genérico en coordenadas cartesianas se representa por:

$$\bar{p} = x \cdot \bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y + z \cdot \bar{u}_z$$

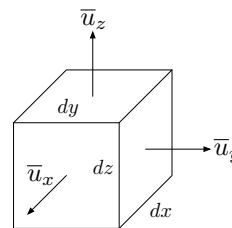
A partir de la figura anterior, se pueden obtener los siguientes resultados.

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = dx \cdot \bar{u}_x + dy \cdot \bar{u}_y + dz \cdot \bar{u}_z.$$

→ Diferencial de superficie:

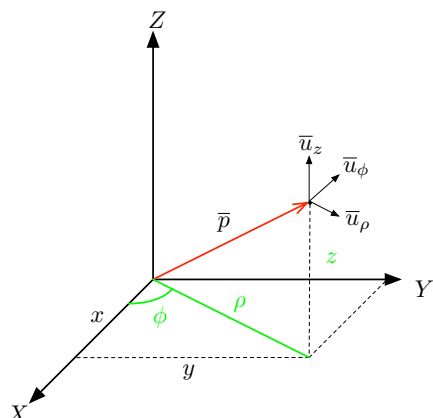
- $z = \text{cte.}: d\bar{s} = dx dy \cdot \bar{u}_z,$
- $y = \text{cte.}: d\bar{s} = dx dz \cdot \bar{u}_y,$
- $x = \text{cte.}: d\bar{s} = dy dz \cdot \bar{u}_x.$



→ Diferencial de volumen:

$$dv = dx dy dz.$$

1.2. Coordenadas cilíndricas



Un punto \bar{p} genérico en coordenadas cilíndricas se representa por:

$$\bar{p} = \rho \cdot \bar{u}_\rho + \phi \cdot \bar{u}_\phi + z \cdot \bar{u}_z,$$

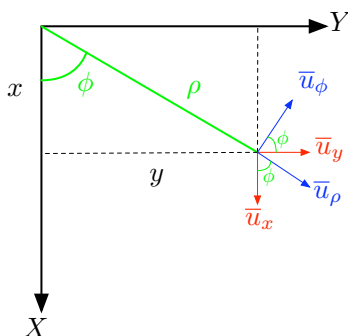
donde:

$$0 \leq \rho \leq \infty,$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

$$-\infty \leq z \leq \infty.$$

La relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas de un punto \bar{p} puede obtenerse en el plano XY .



De la figura de la izquierda puede extraerse fácilmente que:

$$x = \rho \cdot \cos \phi,$$

$$y = \rho \cdot \text{sen } \phi.$$

y teniendo en cuenta que $z = z$ se llega a:

$$x = \rho \cdot \cos \phi,$$

$$y = \rho \cdot \text{sen } \phi,$$

$$z = z.$$

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = d\rho \cdot \bar{u}_\rho + \rho d\phi \cdot \bar{u}_\phi + dz \cdot \bar{u}_z.$$

→ Diferencial de superficie:

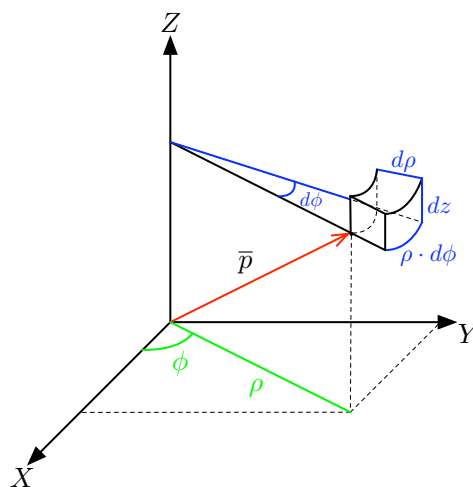
$$\blacksquare \rho = \text{cte.}: d\bar{s} = \rho d\phi dz \cdot \bar{u}_\rho,$$

$$\blacksquare \phi = \text{cte.}: d\bar{s} = d\rho dz \cdot \bar{u}_\phi,$$

$$\blacksquare z = \text{cte.}: d\bar{s} = \rho d\rho d\phi \cdot \bar{u}_z.$$

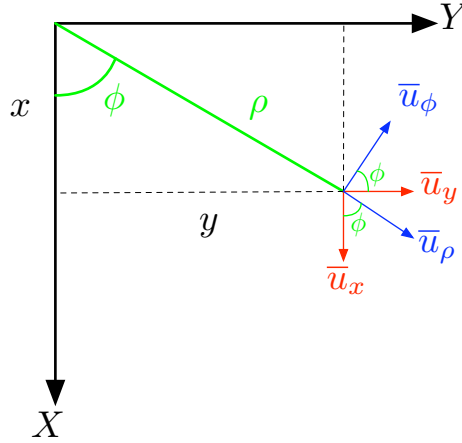
→ Diferencial de volumen:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz.$$



1.2.1. Cambio de coordenadas cilíndricas-cartesianas

Para cambiar de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas, y viceversa, es necesario relacionar los vectores directores de cada sistema de coordenadas. A partir de la siguiente figura



se pueden obtener las siguientes relaciones:¹

CILÍNDRICAS-CARTESIANAS

$$\bar{u}_\rho = \cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y$$

$$\bar{u}_\phi = -\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \phi \cdot \bar{u}_y$$

$$\bar{u}_z = \bar{u}_z$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= a_\rho \cdot \bar{u}_\rho + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi + a_z \cdot \bar{u}_z \\ &= a_\rho (\cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y) + \\ &\quad + a_\phi (-\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \phi \cdot \bar{u}_y) \\ &\quad + a_z \cdot \bar{u}_z = \\ &= \underbrace{(a_\rho \cdot \cos \phi - a_\phi \cdot \text{sen } \phi)}_{a_x} \cdot \bar{u}_x + \\ &\quad + \underbrace{(a_\rho \cdot \text{sen } \phi + a_\phi \cdot \cos \phi)}_{a_y} \cdot \bar{u}_y + \\ &\quad + \underbrace{a_z}_{a_z} \cdot \bar{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix}$$

CARTESIANAS-CILÍNDRICAS

$$\bar{u}_x = \cos \phi \cdot \bar{u}_\rho - \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_\phi$$

$$\bar{u}_y = \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_\rho + \cos \phi \cdot \bar{u}_\phi$$

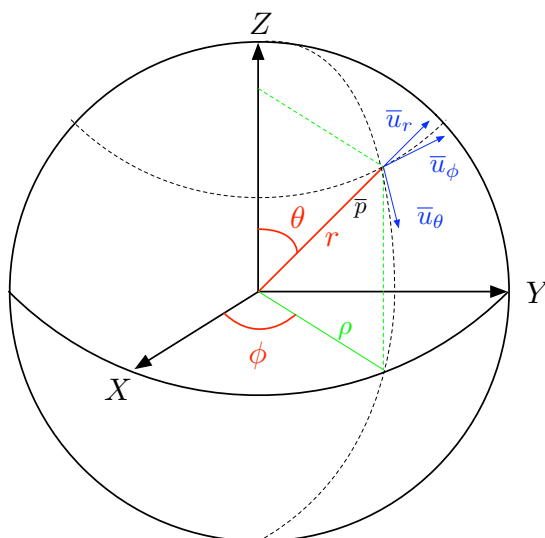
$$\bar{u}_z = \bar{u}_z$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= a_x \cdot \bar{u}_x + a_y \cdot \bar{u}_y + a_z \cdot \bar{u}_z \\ &= a_x (\cos \phi \cdot \bar{u}_\rho - \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_\phi) + \\ &\quad + a_y (\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_\rho + \cos \phi \cdot \bar{u}_\phi) \\ &\quad + a_z \cdot \bar{u}_z = \\ &= \underbrace{(a_x \cdot \cos \phi + a_y \cdot \text{sen } \phi)}_{a_\rho} \cdot \bar{u}_\rho + \\ &\quad + \underbrace{(-a_x \cdot \text{sen } \phi + a_y \cdot \cos \phi)}_{a_\phi} \cdot \bar{u}_\phi + \\ &\quad + \underbrace{a_z}_{a_z} \cdot \bar{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

¹Nótese que, para evitar confusiones con las variables que determinan los sistemas de coordenadas cartesiano (x, y, z) y cilíndrico (ρ, ϕ, z) , los coeficientes que multiplican a los vectores directores se han sustituido por (a_x, a_y, a_z) y (a_ρ, a_ϕ, a_z) en cada sistema de coordenadas respectivamente.

1.3. Coordenadas esféricas



Un punto \bar{p} genérico en coordenadas esféricas se representa por:

$$\bar{p} = r \cdot \bar{u}_r + \theta \cdot \bar{u}_\theta + \phi \cdot \bar{u}_\phi,$$

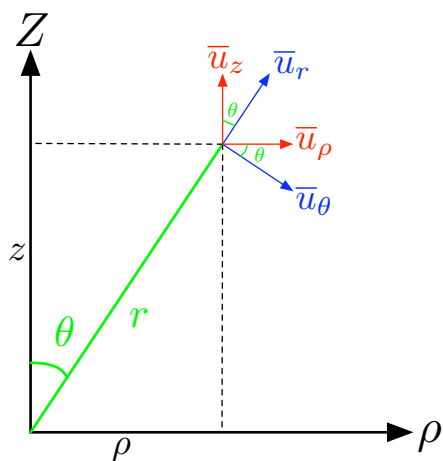
donde:

$$0 \leq r \leq \infty,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

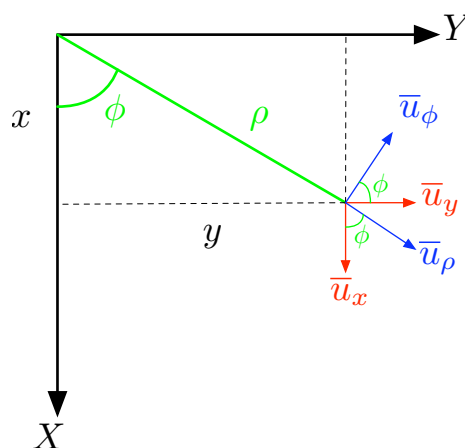
$$0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

La relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas de un punto \bar{p} se obtiene en los planos $Z\rho$ y XY :



$$z = r \cos \theta,$$

$$\rho = r \sin \theta.$$



$$x = \rho \cos \phi,$$

$$y = \rho \sin \phi.$$

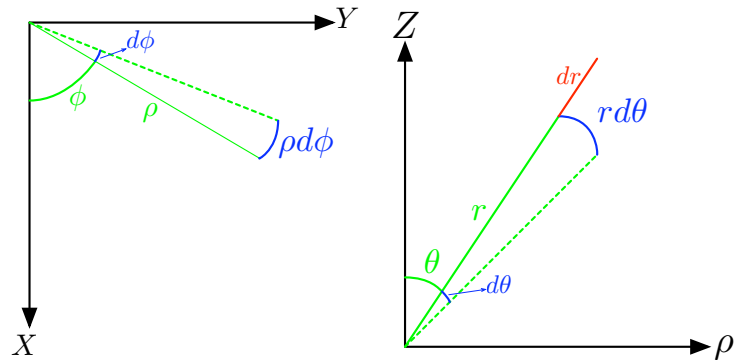
Relacionando ambos resultados se llega a:

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Sean las figuras:



que representan una variación lineal infinitesimal en cada una de las direcciones del sistema de coordenadas esférico. Teniendo en cuenta que $\rho d\phi = r \text{ sen } \theta d\phi$ se cumplen las siguientes relaciones.

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = dr \cdot \bar{u}_r + r d\theta \cdot \bar{u}_\theta + r \text{ sen } \theta d\phi \cdot \bar{u}_\phi.$$

→ Diferencial de superficie:

$$r = \text{cte.}: \quad d\bar{s} = r^2 \text{ sen } \theta d\theta d\phi \cdot \bar{u}_r,$$

$$\theta = \text{cte.}: \quad d\bar{s} = r \text{ sen } \theta dr d\phi \cdot \bar{u}_\theta,$$

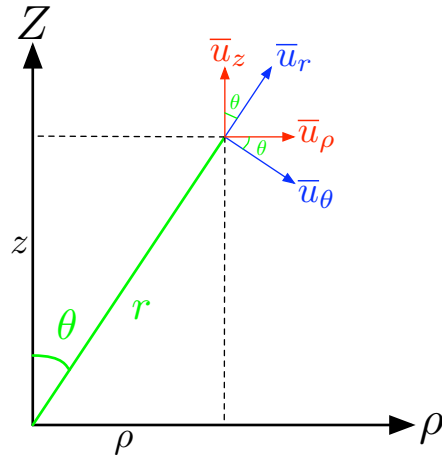
$$\phi = \text{cte.}: \quad d\bar{s} = r dr d\theta \cdot \bar{u}_\phi.$$

→ Diferencial de volumen:

$$dv = r^2 \text{ sen } \theta dr d\theta d\phi.$$

1.3.1. Cambio de coordenadas esféricas-cilíndricas

La relación entre los vectores directores de los sistemas de coordenadas esférico y cilíndrico se puede obtener a partir de la siguiente figura



ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \cos \theta \cdot \bar{u}_z + \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_\rho \\ \bar{u}_\theta &= -\text{sen } \theta \cdot \bar{u}_z + \cos \theta \cdot \bar{u}_\rho \\ \bar{u}_\phi &= \bar{u}_\phi \\ \bar{p} &= a_r \cdot \bar{u}_r + a_\theta \cdot \bar{u}_\theta + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi = \\ &= a_r (\cos \theta \cdot \bar{u}_z + \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_\rho) + \\ &\quad + a_\theta (-\text{sen } \theta \cdot \bar{u}_z + \cos \theta \cdot \bar{u}_\rho) \\ &\quad + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi = \\ &= \underbrace{(a_r \cdot \text{sen } \theta + a_\theta \cdot \cos \theta)}_{a_\rho} \cdot \bar{u}_\rho + \\ &\quad + \underbrace{a_\phi}_{a_\phi} \cdot \bar{u}_\phi + \\ &\quad + \underbrace{(a_r \cdot \cos \theta - a_\theta \cdot \text{sen } \theta)}_{a_z} \cdot \bar{u}_z.\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix}$$

CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS

$$\begin{aligned}\bar{u}_\rho &= \cos \theta \cdot \bar{u}_\theta + \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_r \\ \bar{u}_z &= -\text{sen } \theta \cdot \bar{u}_\theta + \cos \theta \cdot \bar{u}_r \\ \bar{u}_\phi &= \bar{u}_\phi \\ \bar{p} &= a_\rho \cdot \bar{u}_\rho + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi + a_z \cdot \bar{u}_z = \\ &= a_\rho (\cos \theta \cdot \bar{u}_\theta + \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_r) + \\ &\quad + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi \\ &\quad + a_z (-\text{sen } \theta \cdot \bar{u}_\theta + \cos \theta \cdot \bar{u}_r) = \\ &= \underbrace{(a_\rho \cdot \text{sen } \theta + a_z \cdot \cos \theta)}_{a_r} \cdot \bar{u}_r + \\ &\quad + \underbrace{(a_\rho \cdot \cos \theta - a_z \cdot \text{sen } \theta)}_{a_\theta} \cdot \bar{u}_\theta + \\ &\quad + \underbrace{a_\phi}_{a_\phi} \cdot \bar{u}_\phi\end{aligned}$$

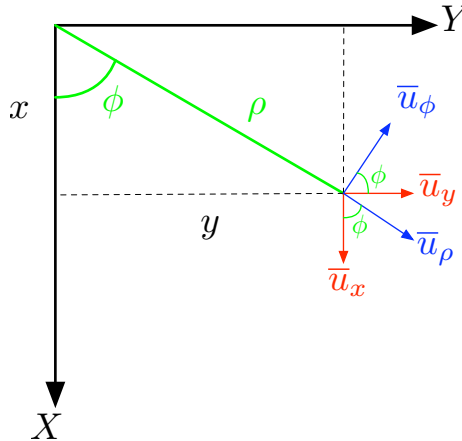
$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix}$$

1.3.2. Cambio de coordenadas esféricas-cartesianas

Para relacionar los vectores directores de los sistemas de coordenadas esférico y cartesiano se hace necesario el paso intermedio que relaciona los sistemas de coordenadas esférico y cilíndrico.

ESFÉRICAS A CARTESIANAS

Obteniéndose de la siguiente figura



que:

$$\begin{aligned}\bar{u}_\rho &= \cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y \\ \bar{u}_\phi &= -\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \phi \cdot \bar{u}_y \\ \bar{u}_z &= \bar{u}_z\end{aligned}$$

y sabiendo que:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \cos \theta \cdot \bar{u}_z + \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_\rho \\ \bar{u}_\theta &= -\text{sen } \theta \cdot \bar{u}_z + \cos \theta \cdot \bar{u}_\rho \\ \bar{u}_\phi &= \bar{u}_\phi\end{aligned}$$

tal y como se demostró en la sección 1.3.1, entonces, sustituyendo el primer sistema de ecuaciones en el segundo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \cos \theta \cdot \bar{u}_z + \text{sen } \theta \cdot (\cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y) \\ \bar{u}_\theta &= -\text{sen } \theta \cdot \bar{u}_z + \cos \theta \cdot (\cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y) \\ \bar{u}_\phi &= (-\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \phi \cdot \bar{u}_y)\end{aligned}$$

y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \text{sen } \theta \cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y + \cos \theta \cdot \bar{u}_z \\ \bar{u}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \theta \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y - \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_z \\ \bar{u}_\phi &= -\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \phi \cdot \bar{u}_y\end{aligned}$$

Definiendo $\bar{p} = a_r \cdot \bar{u}_r + a_\theta \cdot \bar{u}_\theta + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi$, entonces:

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= a_r \cdot \bar{u}_r + a_\theta \cdot \bar{u}_\theta + a_\phi \cdot \bar{u}_\phi = \\
&= a_r (\text{sen } \theta \cos \phi \cdot \bar{u}_x + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y + \cos \theta \cdot \bar{u}_z) + \\
&\quad + a_\theta (\cos \theta \cos \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \theta \text{sen } \phi \cdot \bar{u}_y - \text{sen } \theta \cdot \bar{u}_z) + \\
&\quad + a_\phi (-\text{sen } \phi \cdot \bar{u}_x + \cos \phi \cdot \bar{u}_y) = \\
&= \underbrace{(a_r \cdot \text{sen } \theta \cos \phi + a_\theta \cdot \cos \theta \cos \phi - a_\phi \cdot \text{sen } \phi)}_{a_x} \cdot \bar{u}_x + \\
&\quad + \underbrace{(a_r \cdot \text{sen } \theta \text{sen } \phi + a_\theta \cdot \cos \theta \text{sen } \phi + a_\phi \cdot \cos \phi)}_{a_y} \cdot \bar{u}_y + \\
&\quad + \underbrace{(a_r \cdot \cos \theta - a_\theta \cdot \text{sen } \theta)}_{a_z} \cdot \bar{u}_z +
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix}$$

CARTESIANAS-ESFÉRICAS

Siguiendo un procedimiento análogo al presentado anteriormente y partiendo de

$$\bar{p} = a_x \cdot \bar{u}_x + a_y \cdot \bar{u}_y + a_z \cdot \bar{u}_z,$$

se llega a:

$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi & \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \text{sen } \phi & -\text{sen } \theta \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$