

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Superficies

Ejercicios
Versión 1.0



Este material ha sido elaborado por Esther Gil Cid y se difunde bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento- CompartirIgual 3.0. Puede leer las condiciones de la licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right. Below the text is a horizontal orange bar with a white shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. Ejercicio 190 de la página 83 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, enero 2014.

Demuéstrese que la superficie anterior coincide efectivamente con el hiperboloide $z = xy$.

Solución. Teníamos la superficie de ecuaciones paramétricas

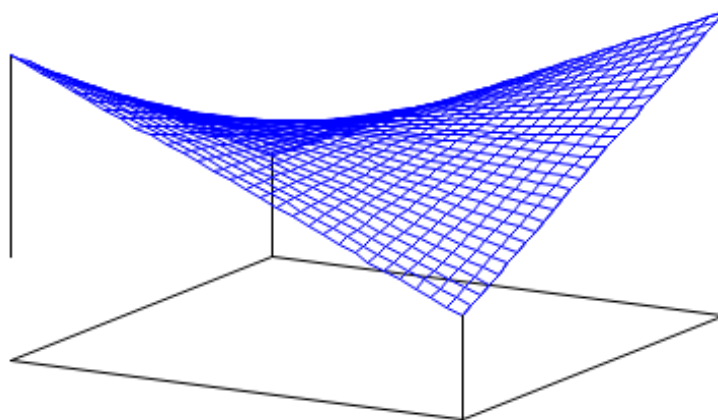
$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)(u, 0, 0) + v(u, 1, u) = (u, v, uv).$$

Hay que comprobar que si

$$x = u, y = v, z = uv$$

se cumple $z = xy$. Pero eso es obvio.

La gráfica de esta superficie es



2. Determinense las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución generada por la curva $x = u^3 + 1, y = 0, z = u, 0 < u < 3$, al girar alrededor del eje Oz .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Pero además, los puntos que están en la superficie y que tienen la misma coordenada z deben estar a la misma distancia del eje z , lo que significa que debe ser

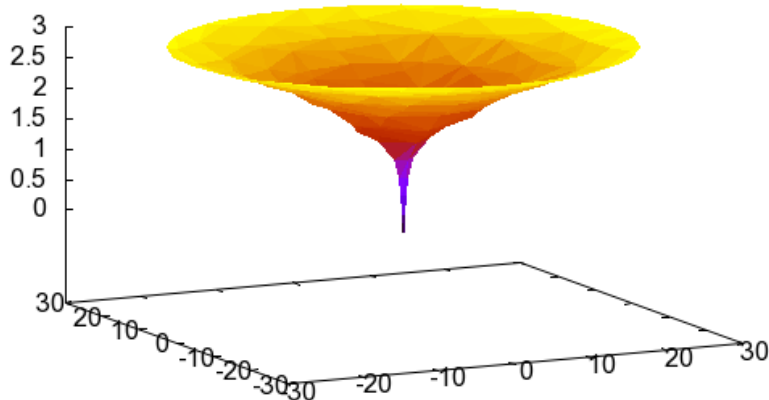
$$x^2 + y^2 = (u^3 + 1)^2 = (z^3 + 1)^2.$$

Por eso, la ecuación implícita de la superficie es

$$x^2 + y^2 = (z^3 + 1)^2.$$

Las ecuaciones paramétricas se deducen considerando a z como parámetro y multiplicando por $\cos \theta$ y $\sin \theta$, al estar generada al girar una recta alrededor de uno de los coordenados. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= (u^3 + 1) \cos \theta \\ y &= (u^3 + 1) \sin \theta \quad 0 < u < 3, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ z &= u \end{aligned}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Solución. La generatriz es la recta y la directriz es la curva. Comprobamos que está en el plano normal a la recta. Como $(0, 1, 1)$ es un vector director de la curva, entonces la ecuación del plano normal es

$$y + z = 0.$$

Los puntos de la curva lo cumplen, porque

$$0 \cdot t^2 + t - t = 0.$$

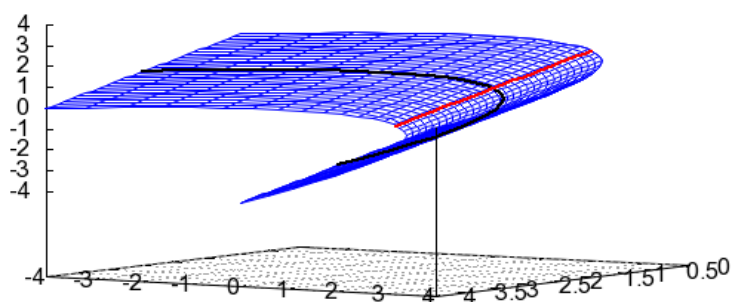
Nos falta una parametrización de la recta, que es

$$\alpha(u) = (0, u, u),$$

y un punto común, que es $(0, 0, 0) = \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0)$. La ecuación de la superficie de traslación es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, \theta) &= \mathbf{x}_2(u) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= (t^2, t, -t) + (0, u, u) - (0, 0, 0) \\ &= (t^2, t + u, -t + u). \end{aligned}$$

Es un cilindro parabólico:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

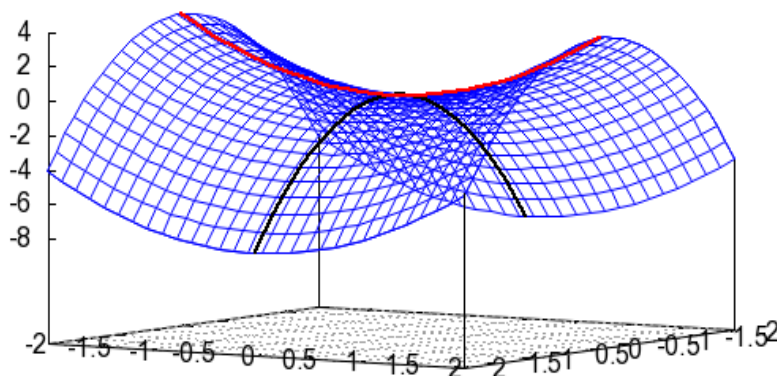
Solución. La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

$$\mathbf{x}_1(u) = (0, u, u^2), \mathbf{x}_2(t) = (t, 0, -2t^2).$$

Un punto común es $(0, 0, 0) = \mathbf{x}_1(0, 0, 0) = \mathbf{x}_2(0, 0, 0)$. La ecuación del paraboloides hiperbólico es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, \theta) &= \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= (0, u, u^2) + (t, 0, -2t^2) - (0, 0, 0) \\ &= (t, u, u^2 - 2t^2). \end{aligned}$$

Su gráfica es:



5. Estudie si la parametrización

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = u^2 + v^2$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



6. Sea la superficie $x = uv + 1, y = uv^2 - 2, z = u^2 + uv^3$ y M el conjunto de sus puntos singulares. Determínese M .

Solución. Tenemos:

$$\mathbf{x}(u, v) = (uv + 1, v^2u - 2, u^2 + uv^3).$$

Entonces

$$\mathbf{x}_u = (v, v^2, 2u + v^3), \quad \mathbf{x}_v = (u, 2uv, 3uv^2).$$

Si hacemos

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & v^2 & 2u + v^3 \\ u & 2uv & 3uv^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (uv(v^3 - 4u), 2uv(u - v), uv^2),$$

tenemos que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ sólo se anula si $u = 0$ o $v = 0$. Por eso, M es la imagen de las rectas $u = 0, v = 0$. Este conjunto es:

$$\mathbf{x}(0, v) = (1, -2, 0), \quad \mathbf{x}(u, 0) = (1, -2, 0).$$

Por tanto, M es un único punto.

7. Calcule la ecuación del plano tangente a la superficie M dada por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ para $z > 0$, en el punto donde $x = 4, y = 3$.

Solución. Primero determinamos la ecuación paramétrica de la superficie. La superficie M es un cono con $z > 0$, o son los puntos (x, y, z) de \mathbb{R}^3 donde $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, una parametrización es

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

El punto donde tenemos que determinar el plano tangente es donde $u = 4, v = 3$, es decir,

$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

En este punto, tenemos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Un vector perpendicular a ambos es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(4, 3) \times \mathbf{x}_v(4, 3) &= \left(1, 0, \frac{4}{5}\right) \times \left(0, 1, \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right).\end{aligned}$$

Si tomamos un punto genérico de \mathbb{R}^3 , (x, y, z) , el vector $(x - 4, y - 3, z - 5)$ está en el plano tangente si y sólo si:

$$\begin{aligned}(x - 4, y - 3, z - 5) \cdot \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right) &= 0 \\ \iff -4(x - 4) - 3(y - 3) + 5(z - 5) &= 0 \\ \iff -4x - 3y + 5z &= 0.\end{aligned}$$

Esta es la ecuación del plano tangente que buscábamos.

8. Ejercicio 193 de la página 86 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés, enero 2014.

Calcúlense las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano tangente a la superficie

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv)$$

en el punto $(1, -1, -1)$.

Solución. Tenemos que $\mathbf{x}(1, -1) = (1, -1, -1)$. Además:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 0, v), & \mathbf{x}_u(1, -1) &= (1, 0, -1), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 1, u), & \mathbf{x}_v(1, -1) &= (0, 1, 1).\end{aligned}$$

El plano tangente pasa por $\mathbf{x}(1, -1) = (1, -1, -1)$ y contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(1, -1)$ y $\mathbf{x}_v(1, -1)$, es decir, su ecuación implícita es:

$$0 = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z + 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z - 1,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Encuéntrese los puntos de la superficie

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$$

en los que el plano tangente es paralelo al plano $x - y + z = 0$.

Solución. Como

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 1, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-1, 1, 2v),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) = (1, 1, 2u) \times (-1, 1, 2v) \\ &= (2v - 2u, -2u - 2v, 2), \end{aligned}$$

que es paralelo al vector $(v - u, -u - v, 1)$. Y ambos son perpendiculares al plano tangente.

Por otro lado, un vector perpendicular al plano $x - y + z = 0$ es $(1, -1, 1)$. Para que los dos planos sean paralelos debe cumplirse

$$\begin{aligned} (v - u, -u - v, 1) &= k(1, -1, 1) \\ \implies k &= 1, v - u = 1, u + v = 1. \end{aligned}$$

Esto se cumple cuando $v = 1, u = 0$, es decir en el punto

$$\mathbf{x}(0, 1) = (-1, 1, 1).$$

10. Determinar el vector tangente al paralelo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 es

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \pi)$.

Solución. La parametrización es

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Lo comprobamos con la igualdad

$$\mathbf{x}'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t)).$$

En este caso, es

$$u(t) = t, \quad v(t) = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathbf{x}_y(\theta, \phi) = (-\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta \operatorname{sen} \phi, 0).$$

Entonces

$$u'(t) = 1, \quad v'(t) = 0.$$

Y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \\ &= \mathbf{x}_u\left(t, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\operatorname{sen} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}, \cos t \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}, 0\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, 0\right). \end{aligned}$$

11. Determinéense los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie dada por

$$x = u \cos v; y = u \operatorname{sen} v; z = u^2$$

en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2), \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0). \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

A partir de estos valores, hacemos:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u) \cdot (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u) \\ &= \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v + (2u)^2 = 1 + 4u^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \\ &= -u \cos v \operatorname{sen} v + u \cos v \operatorname{sen} v \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) \\ &= (-u \operatorname{sen} v)^2 + (u \cos v)^2 \\ &= u^2. \end{aligned}$$

El punto $(1, 0, 1)$ se corresponde con los valores de $u = 1; v = 0$; con lo que

$$E = 5, F = 0, G = 1.$$

12. Tenemos un cilindro dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Determinense los coeficientes de la primera forma fundamental

Solución: En un punto $\mathbf{x}(u, v)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, a). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1. \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



13. Tenemos un cono dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Determinen los coeficientes de la primera forma fundamental

Solución: Determinamos los coeficientes de la primera forma fundamental. En un punto $\mathbf{x}(u, v)$ se tiene

$$\mathbf{x}_u = (-v \sin u, v \cos u, 0),$$

$$\mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, a).$$

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ &= (-v \sin u, v \cos u, 0) \cdot (-v \sin u, v \cos u, 0) \\ &= v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u = v^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (-v \sin u, v \cos u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, a) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= (\cos u, \sin u, a) \cdot (\cos u, \sin u, a) \\ &= a^2 + \cos^2 u + \sin^2 u = a^2 + 1. \end{aligned}$$

14. Tenemos la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$. θ representa la latitud y ϕ la longitud de un punto de la esfera.

Estudíese si en el punto $(0, R, 0)$, las curvas contenidas en la esfera y que pasan por este punto, dadas por

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ son

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = R^2 \sin^2 \phi, \\ F &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0 \\ G &= \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = R^2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta &= (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0), \\ \mathbf{x}_\phi &= (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\theta\theta} &= (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, 0), \\ \mathbf{x}_{\theta\phi} &= (-R \sin \theta \cos \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, -R \cos \phi). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos A y B :

$$\begin{aligned} A &= (\theta')^2 \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{x}_\theta + 2\theta' \phi' \mathbf{x}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{x}_\theta + (\phi')^2 \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{x}_\theta \\ &= (\theta')^2 (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, 0) \cdot (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0) \\ &\quad + 2\theta' \phi' (-R \sin \theta \cos \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0) \cdot (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0) \\ &\quad + (\phi')^2 (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, -R \cos \phi) \cdot (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0) \\ &= R^2 \theta' \phi' \sin 2\phi, \\ B &= (\theta')^2 \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{x}_\phi + 2\theta' \phi' \mathbf{x}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{x}_\phi + (\phi')^2 \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{x}_\phi \\ &= (\theta')^2 (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, 0) \cdot (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ &\quad + 2\theta' \phi' (-R \sin \theta \cos \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0) \cdot (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ &\quad + (\phi')^2 (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, -R \cos \phi) \cdot (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ &= -\frac{1}{2} R^2 (\theta')^2 \sin 2\phi. \end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Para el punto $(0, R, 0) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escribir la curva $\mathbf{c}_1(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1(t) &= (R \cos t, R \sin t, 0) \\ &= \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{x}\left(t, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\theta(t) = t, \quad \phi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= 0, & \phi''(t) &= 0, \\ \theta'(t) &= 1, & \theta''(t) &= 0.\end{aligned}$$

La ecuación de las geodésicas es

$$\begin{cases} 0 = 0 + 1 \cdot 0 \cdot \sin 2\phi(t), \\ 0 = 0 - \frac{1}{2}(1)^2 \sin 2\phi(t) = -\frac{1}{2} \sin \pi.\end{cases}$$

Como estas igualdades son ciertas, entonces esta línea (corresponde al ecuador) es una geodésica.

Procedemos igual para $\mathbf{c}_2(t) = (0, R \cos t, R \sin t)$. En esta curva, es

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2(t) &= (0, R \cos t, R \sin t) \\ &= \mathbf{x}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right) \\ \implies \theta(t) &= \frac{\pi}{2}, \quad \phi(t) = t.\end{aligned}$$

Para estas funciones, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= 1, & \phi''(t) &= 0, \\ \theta'(t) &= 0, & \theta''(t) &= 0,\end{aligned}$$

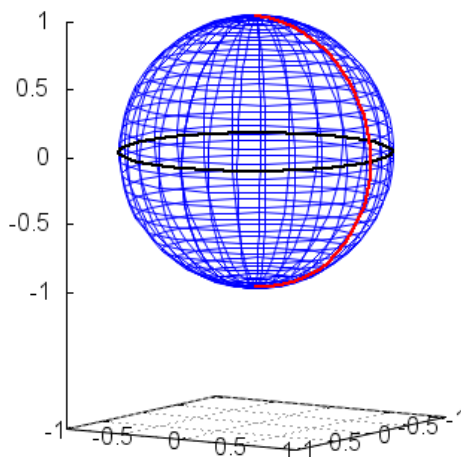
y la ecuación de las geodésicas queda reducida a

$$\begin{cases} 0 = \theta'' \sin^2 \phi + \theta' \phi' \sin 2\phi, \\ 0 = \phi'' - \frac{1}{2}(\theta')^2 \sin 2\phi.\end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





15. Tenemos la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$. θ representa la latitud y ϕ la longitud de un punto de la esfera.

Estudíese si en el punto $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$, la curva contenida en la esfera dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \left(R \cos t \sin \frac{\pi}{4}, R \sin t \sin \frac{\pi}{4}, R \cos \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} R \right) \end{aligned}$$

y que pasa por este punto es una geodésica.

Solución: Tenemos que comprobar que verifica la ecuación de las geodésicas, que es para esta superficie:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



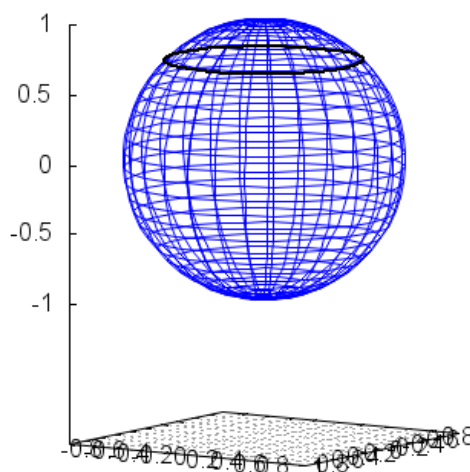
Por eso:

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= 0, & \phi''(t) &= 0, \\ \theta'(t) &= 1, & \theta''(t) &= 0. \end{aligned}$$

Deben ser 0 las dos expresiones siguientes:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \cdot \text{sen}^2\phi + 1 \cdot 0 \cdot \text{sen} 2\phi = 0, \\ a_2 = 0 - \frac{1}{2}1^2 \text{sen} 2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \text{sen} \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0. \end{cases}$$

por tanto, esta curva no es una geodésica. Esta curva es un paralelo, que se representa a continuación:



16. Tenemos un cilindro dado por la ecuación:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \text{sen } u, av),$$

para $u \in [-\pi, \pi], v \in \mathbb{R}$.

Estudiense cuáles son las geodésicas en el punto $\mathbf{x}(0, 0) = (1, 0, 0)$, si el vector tangente a la geodésica es el vector (u_1, v_1) .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Además, como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, a), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos A y B :

$$\begin{aligned} A &= (u')^2 (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &\quad + 2u'v' (0, 0, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) + (v')^2 (0, 0, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ &= 0, \\ B &= (u')^2 (-\cos u - \operatorname{sen} u, 0) \cdot (0, 0, 1) \\ &\quad + 2u'v' (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) + (v')^2 (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies &\begin{cases} 0 = u'', \\ 0 = a^2 v''. \end{cases} \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son las del punto $\mathbf{x}(0, 0) = (1, 0, 0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$.
Entonces, por el enunciado, es

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, & v(0) &= 0, \\ u'(0) &= u_1, & v'(0) &= v_1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, tenemos

$$u(t) = k_1 t + c_1$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Por eso, es:

$$(u(t), v(t)) = (k_1 t, v_1 t).$$

Las geodésicas son las curvas

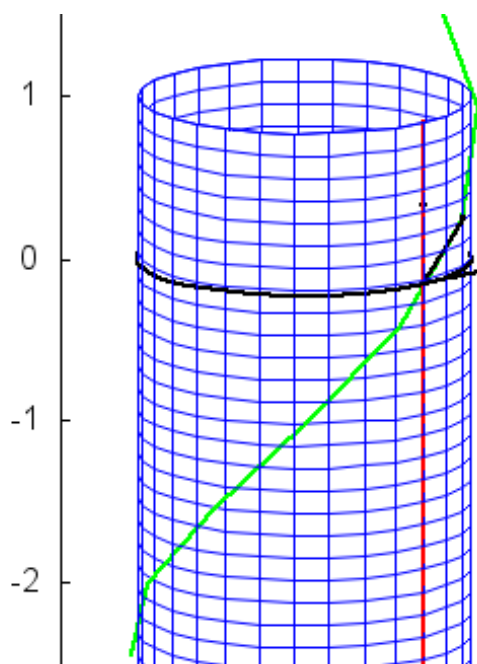
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) = (\cos k_1 t, \sin k_1 t, av_1 t).$$

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma $(0, v_1)$, entonces la geodésica es la recta paralela al eje z que pasa por $(1, 0, 0)$ dada por $(1, 0, av_1 t)$.

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma $(u_1, 0)$, entonces la geodésica es la circunferencia de radio 1 contenida en un plano paralelo al plano xy que pasa por $(1, 0, 0)$. Está dada por $(\cos k_1 t, \sin k_1 t, 0)$.

Si el vector tangente a la geodésica es de la forma (u_1, v_1) , entonces la geodésica es una hélice contenida en el cilindro de ecuación $(\cos k_1 t, \sin k_1 t, av_1 t)$.

Se representan en la siguiente figura, junto con los vectores tangente a la curva:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Hemos elegido el punto $(1, 0, 0)$, pero este resultado se puede extrapolar a cualquier punto, es decir, las únicas geodésicas del cilindro son rectas paralelas a su eje, circunferencias perpendiculares a él y hélices.

17. Consideramos la imagen de la curva

$$\mathbf{x}(t) = (\theta(t), \phi(t)) = \left(\ln \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right), \frac{\pi}{2} - t \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

sobre la esfera de radio uno dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$. Determinése su longitud.

Solución. Conocemos los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera, que son:

$$E = \sin^2 \phi,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1.$$

Además, para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right)} \left(\left(1 + \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}, \\ \phi'(t) &= -1. \end{aligned}$$

Entonces

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

La longitud de la curva es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(E(\theta')^2 + 2F\theta'\phi' + G(\phi')^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

18. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$$

para $v > 0, 0 < u < \pi$. Sea $P = (0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. ¿Cuál es el ángulo que forman las curvas parámetro en este punto?

Solución: Las curvas parámetro que pasan por $P = (0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(u) &= \mathbf{x}(u, 1) = (\cos u, \sin u, 1), & 0 < u < \pi, \\ \mathbf{x}_2(v) &= \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (v \cos \frac{\pi}{2}, v \sin \frac{\pi}{2}, v) = (0, v, v), & v > 0. \end{aligned}$$

Entonces, los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{x}'_1\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (-1, 0, 0), \quad \|\mathbf{u}_1\| = 1, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{x}'_2(1) = (0, 1, 1), \quad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

son tangentes a las curvas parámetro por el punto $(0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Por eso, el ángulo que forman las curvas (es el ángulo que forman los vectores tangentes) en el punto dado es:

$$\cos \alpha = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Esto significa que las curvas parámetro son ortogonales.

Podíamos haber utilizado la ecuación para el ángulo que forman las curvas parámetro en un punto. Además, sabemos que

$$E = v^2, F = 0, G = 2.$$

y en nuestro punto es:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



19. Sea S la parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 parametrizada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$. Vamos a determinar el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \pi$. ¿Cuál es el área de la esfera?

Solución. Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera, que son:

$$E = \sin^2 \phi, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Entonces es:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\sin^2 \phi} = \sin \phi,$$

para la región considerada. Entonces, el área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{EG - F^2} d\phi d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos \phi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

Si queremos calcular el área de la esfera, hacemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos \phi \Big|_0^{\pi} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



en $D = (0, 2) \times (0, 2)$. Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Solución. La aplicación $\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$ es una parametrización de la superficie en un entorno de cada uno de sus puntos en $D \subset \mathbb{R}^2$. Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (2u, 2u, 1), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-2v, 2v, 0).\end{aligned}$$

Los coeficientes e , f y g de la segunda forma fundamental se determinan a partir del vector normal unitario \mathbf{N} y las derivadas segundas de \mathbf{x} . Empezamos con el vector normal normal unitario \mathbf{N} . Sabemos que el vector

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 2u & 1 \\ -2v & 2v & 0 \end{vmatrix} = (-2v, -2v, 8uv) = -2v(1, 1, -4u)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Entonces: .

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(-2v)^2(1^2 + 1^2 + (-4u)^2)} = 2v\sqrt{2 + 16u^2}, \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{-2v(1, 1, -4u)}{2v\sqrt{2 + 16u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2 + 16u^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2 + 16u^2}}, 4\frac{u}{\sqrt{2 + 16u^2}} \right).\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}} (-1, -1, 4u) \cdot (2, 2, 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}} (-2-2) = -\frac{4}{\sqrt{2+16u^2}}, \\
 f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}} (-1, -1, 4u) \cdot (0, 0, 0) = 0, \\
 g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}} (-1, -1, 4u) \cdot (-2, 2, 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}} (2-2) = 0.
 \end{aligned}$$

21. Sea T el toro de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 x &= (4 + \operatorname{sen} u) \cos v, \\
 y &= (4 + \operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \\
 z &= \cos u.
 \end{aligned}$$

- a) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
 b) Clasifique sus puntos.

Solución. La aplicación $\mathbf{x}(u, v) = ((4 + \operatorname{sen} u) \cos v, (4 + \operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, \cos u)$ es una parametrización del toro en un entorno de cada uno de sus puntos seleccionando un abierto D adecuado para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico $\mathbf{x}(u, v)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u), \\
 \mathbf{x}_v(u, v) &= (-(4 + \operatorname{sen} u) \operatorname{sen} v, (4 + \operatorname{sen} u) \cos v, 0).
 \end{aligned}$$

Para clasificar el punto, tenemos que calcular los coeficientes L , M y N de la segunda forma fundamental a partir del vector normal unitario \mathbf{n}



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

y las derivadas de \mathbf{x} . Empezamos con el vector normal unitario \mathbf{n} :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -(4 + \sin u) \sin v & (4 + \sin u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (4 + \sin u) (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u \cos^2 v + \sin^2 v \cos u) \\ &= (4 + \sin u) (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u), \\ \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(4 + \sin u)^2 ((\cos v \sin u)^2 + (\sin v \sin u)^2 + \cos^2 u)} \\ &= (4 + \sin u) \sqrt{\cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v \sin^2 u + \cos^2 u} \\ &= (4 + \sin u), \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u).\end{aligned}$$

Además, como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-(4 + \sin u) \cos v, -(4 + \sin u) \sin v, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),\end{aligned}$$

entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} \\ &= (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u) \cdot (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u) \\ &= -\sin^2 u \cos^2 v - \sin^2 v \sin^2 u - \cos^2 u = -1, \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} \\ &= (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u) \cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \\ &= -\sin u \cos v \cos u \sin v + \sin u \cos v \cos u \sin v = 0, \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} \\ &= (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u) \cdot (-(4 + \sin u) \cos v, -(4 + \sin u) \sin v, 0) \\ &= -(\sin u \cos^2 v) (4 + \sin u) - (\sin^2 v \sin u) (4 + \sin u) \\ &= -\sin u (4 + \sin u).\end{aligned}$$

Por eso

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- Si $0 < u < \pi$, entonces $\mathbf{x}(u, v)$ es elíptico,
- Si $\pi < u < 2\pi$, entonces $\mathbf{x}(u, v)$ es hiperbólico,
- Si $u = 0$ o $u = \pi$, entonces $e \neq 0$ pero $eg - f^2 = 0$, por lo que es parabólico.

22. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Determinense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$ de la hélice dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Solución: Determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (-\sin u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

En $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$ es

$$\mathbf{x}_u(1, 0) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{x}_v(1, 0) = (0, 0, 1).$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(1, 0) &= \frac{\mathbf{x}_u(1, 0) \times \mathbf{x}_v(1, 0)}{\|\mathbf{x}_u(1, 0) \times \mathbf{x}_v(1, 0)\|} \\ &= \frac{(0, 1, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(0, 1, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\ &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Ahora parametrizamos la hélice por la longitud de arco. Como $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, entonces

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

y

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Por eso:

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{x}'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{x}''(s) = \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \mathbf{x}''(0) = \frac{1}{2} (-1, 0, 0).$$

Entonces

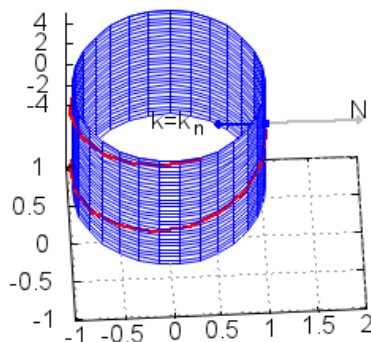
$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{x}''(0) = \frac{1}{2} (-1, 0, 0).$$

Lo escribimos a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal. Como una base del espacio tangente es $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y una base de la recta normal es $(1, 0, 0)$, tenemos que

$$\frac{1}{2} (-1, 0, 0) = (0, 0, 0) + \frac{1}{2} (-1, 0, 0)$$

$$\implies \mathbf{k}_g(s) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{k}_n(s) = \frac{1}{2} (-1, 0, 0) = -\frac{1}{2} (1, 0, 0).$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la hélice, los vectores



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



23. Determine la curvatura geodésica del paralelo y del meridiano que pasan por un punto de la parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$.

Solución: Comenzamos determinando una base del espacio tangente y de la recta normal a la esfera. Como:

$$\mathbf{x}_\theta = (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0),$$

$$\mathbf{x}_\phi = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi),$$

Una base unitaria del espacio tangente es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x}_\theta}{\|\mathbf{x}_\theta\|} = \frac{(-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0)}{\|(-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0)\|} \\ &= \frac{1}{R \sin \phi} (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0) \\ &= (\sin \theta, \cos \theta, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\phi\|} = \frac{(R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi)}{\|(R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi)\|} \\ &= \frac{1}{R} (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ &= (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0) \times (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ &= (-R^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -R^2 \sin \theta \sin^2 \phi, -R^2 (\cos \phi \sin \phi) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \\ &= (-R^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -R^2 \sin \theta \sin^2 \phi, -R^2 \cos \phi \sin \phi) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que una base de la recta normal es:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} \\ &= \frac{(-R^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -R^2 \sin \theta \sin^2 \phi, -R^2 \cos \phi \sin \phi)}{\sqrt{(-R^2 \cos \theta \sin^2 \phi)^2 + (-R^2 \sin \theta \sin^2 \phi)^2 + (-R^2 \cos \phi \sin \phi)^2}} \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

ya que $\phi \in (0, \pi)$.

La ecuación del meridiano es $\theta = c$ constante, es decir, es

$$\alpha(\phi) = (R' \operatorname{sen} \phi, R'' \operatorname{sen} \phi, R \cos \phi),$$

donde $R' = R \cos \theta$ y $R'' = R \operatorname{sen} \theta$ son constantes. Como

$$\alpha'(\phi) = (R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi)$$

$$\alpha''(\phi) = (-R' \operatorname{sen} \phi, -R'' \operatorname{sen} \phi, -R \cos \phi),$$

entonces el vector tangente al meridiano es:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{R} (R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi),$$

Un vector en la dirección de la normal principal a la curva está dado por

$$\begin{aligned} (\alpha' \times \alpha'') \times \alpha' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ R' \cos \phi & R'' \cos \phi & -R \operatorname{sen} \phi \\ -R' \operatorname{sen} \phi & -R'' \operatorname{sen} \phi & -R \cos \phi \end{vmatrix} \times \alpha' \\ &= (-RR'', RR', 0) \times (R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -RR'' & RR' & 0 \\ R' \cos \phi & R'' \cos \phi & -R \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \\ &= (-R^2 R' \operatorname{sen} \phi, -R^2 R'' \operatorname{sen} \phi, -R \cos \phi ((R')^2 + (R'')^2)) \\ &= (-R^2 R' \operatorname{sen} \phi, -R^2 R'' \operatorname{sen} \phi, -R^3 \cos \phi). \end{aligned}$$

Su módulo es

$$\sqrt{R^4 (R')^2 \operatorname{sen}^2 \phi + R^4 (R'')^2 \operatorname{sen}^2 \phi + R^6 \cos^2 \phi} = R^3.$$

Por tanto el vector normal es:

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{R'}{R} \operatorname{sen} \phi, -\frac{R''}{R} \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi \right)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Como la función curvatura es

$$\begin{aligned}
 k(\phi) &= \frac{\|\alpha'(\phi) \times \alpha''(\phi)\|}{\|\alpha'(\phi)\|^3} = \frac{\|(-RR'', RR', 0)\|}{\|(R' \cos \phi, R'' \cos \phi, -R \sin \phi)\|^3} \\
 &= \frac{\sqrt{(-RR'')^2 + (RR')^2}}{\left((R' \cos \phi)^2 + (R'' \cos \phi)^2 + (-R \sin \phi)^2\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(-RR \sin \theta)^2 + (RR \cos \theta)^2}}{\left((R \cos \theta \cos \phi)^2 + (R \sin \theta \cos \phi)^2 + (-R \sin \phi)^2\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{\sqrt{R^4 \sin^2 \theta + R^4 \cos^2 \theta}}{\left(R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \sin^2 \phi\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{R^2}{(R^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R},
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} &= k\mathbf{n} = k(-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi) \\
 &= \left(-\frac{1}{R} \cos \theta \sin \phi, -\frac{1}{R} \sin \theta \sin \phi, -\frac{1}{R} \cos \phi\right).
 \end{aligned}$$

Además sabemos que

$$\mathbf{k} = \frac{1}{R}\mathbf{N} = \frac{1}{R}\mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{k}_n, \quad \mathbf{k}_g = \mathbf{0}$$

y podemos concluir que la curvatura geodésica es 0.

Vamos a determinar el vector curvatura geodésica en el paralelo. La ecuación del paralelo es $\phi = c$ constante, es decir, es

$$\beta(\theta) = (R'' \cos \theta, R'' \sin \theta, R'),$$

donde $R' = R \cos \phi$ y $R'' = R \sin \phi$ son constantes. Como

$$\beta'(\theta) = (-R'' \sin \theta, R'' \cos \theta, 0), \quad \beta''(\theta) = (-R'' \cos \theta, -R'' \sin \theta, 0),$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Un vector en la dirección de la normal principal a la curva está dado por

$$\begin{aligned}
 (\beta' \times \beta'') \times \beta' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R'' \operatorname{sen} \theta & R'' \operatorname{cos} \theta & 0 \\ -R'' \operatorname{cos} \theta & -R'' \operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix} \times \beta' \\
 &= (0, 0, (R'')^2) \times (R' \operatorname{cos} \phi, R'' \operatorname{cos} \phi, -R \operatorname{sen} \phi) \\
 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & (R'')^2 \\ -R'' \operatorname{sen} \theta & R'' \operatorname{cos} \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-(R'')^3 \operatorname{cos} \theta, -(R'')^3 (\operatorname{sen} \theta), 0) \\
 &= (-(R \operatorname{sen} \theta)^3 \operatorname{cos} \theta, -(R \operatorname{sen} \theta)^3 (\operatorname{sen} \theta), 0) \\
 &= (-R^3 \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{cos} \theta, -R^3 \operatorname{sen}^4 \theta, 0)
 \end{aligned}$$

Su módulo es

$$\sqrt{R^6 \operatorname{sen}^6 \theta \operatorname{cos}^2 \theta + R^6 \operatorname{sen}^8 \theta} = R^3 \operatorname{sen}^3 \theta.$$

Por tanto el vector normal es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= \frac{1}{R^3 \operatorname{sen}^3 \theta} (-R^3 \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{cos} \theta, -R^3 \operatorname{sen}^4 \theta, 0) \\
 &= (-\operatorname{cos} \theta, -\operatorname{sen} \theta, 0).
 \end{aligned}$$

En este caso, la función curvatura es

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\|(0, 0, (R'')^2)\|}{\|(-R'' \operatorname{sen} \theta, R'' \operatorname{cos} \theta, 0)\|^3} \\
 &= \frac{\sqrt{(R'')^4}}{((R'' \operatorname{sen} \theta)^2 + (R'' \operatorname{cos} \theta)^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{(R'')^2}{(R'')^3} = \frac{1}{R''}.
 \end{aligned}$$

Y entonces

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{1}{R''} (-\operatorname{cos} \theta, -\operatorname{sen} \theta, 0) = \frac{1}{R''} (-\operatorname{cos} \theta, -\operatorname{sen} \theta, 0).$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

y una base de la recta normal es

$$\mathbf{N} = (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi).$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \\ &= \frac{1}{R \sin \phi} (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) \cdot (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi) \\ &= \frac{1}{R \sin \phi} (\cos^2 \theta \sin \phi + \sin^2 \theta \sin \phi) = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Resulta, pues:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_g &= \mathbf{k} - \kappa_n \mathbf{N} = \frac{1}{R \sin \phi} (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) - \frac{1}{R} (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi) \\ &= \frac{1}{R \sin \phi} (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) - \frac{1}{R} (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi) \\ &= \frac{1}{R} \left(\cos \theta \sin \phi - \frac{\cos \theta}{\sin \phi}, \sin \theta \sin \phi - \frac{\sin \theta}{\sin \phi}, \cos \phi \right). \end{aligned}$$

Su módulo es la curvatura geodésica, que es

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{1}{R} \sqrt{\left(\cos \theta \sin \phi - \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right)^2 + \left(\sin \theta \sin \phi - \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right)^2 + \cos^2 \phi} \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \phi} - 2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 2 \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} + \cos^2 \phi} \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{\sin^2 \phi - 2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} + \cos^2 \phi} \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \phi} - 2 + 1} \\ &= \frac{1}{R \sin \phi} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \frac{\cos \phi}{R \sin \phi}. \end{aligned}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

24. Sea la superficie $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + u^4 + v^6)$ donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Determinéense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en $\mathbf{x}(0, 0) = (0, 0, 0)$ para la curva $\mathbf{x}(t) = (t, 0, t^2 + t^4)$.

Solución. Comenzamos determinando \mathbf{N} . Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$ son

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 0, 2u + 4u^3), & \mathbf{x}_u(0, 0) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 1, 6v^5), & \mathbf{x}_v(0, 0) &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

El vector normal unitario \mathbf{N} es

$$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Determinamos el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$, que tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (1, 0, 2t + 4t^3), & \mathbf{x}'(0) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}''(t) &= (0, 0, 2 + 12t^2), & \mathbf{x}''(0) &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

Entonces, el vector \mathbf{v} es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((1, 0, 0) \times (0, 0, 2)) \times (1, 0, 0) \\ &= (0, -2, 0) \times (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

El vector normal a la curva es

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(0, 0, 2)}{\|(0, 0, 2)\|} = (0, 0, 1).$$

Por otro lado, la curvatura es

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(0) &= 2(0, 0, 1) \\ &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

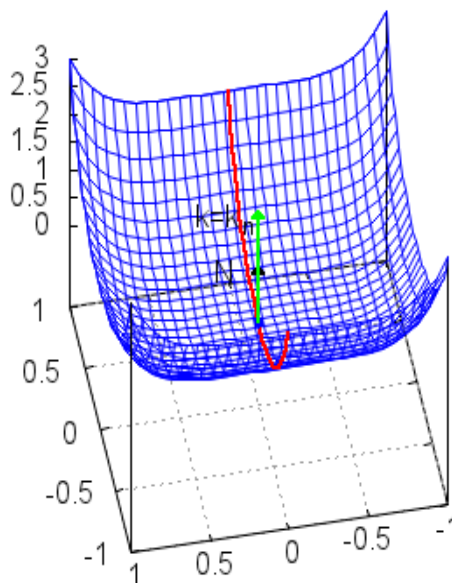
Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y una base de la recta normal es $(0, 0, 1)$, tenemos que

$$(0, 0, 2) = 2(0, 0, 1),$$

donde

$$\mathbf{k}_g(0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{k}_n(0) = 2(0, 0, 1).$$

En la siguiente figura se representan la superficie y la curva y los vectores normal a la superficie, en negro y curvatura y curvatura normal, que coinciden, en verde.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$.

Solución: Sabemos que en un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ se tiene

$$E = R^2 \sin^2 \phi, \quad F = 0, \quad G = R^2, \\ e = R \sin^2 \phi, \quad f = 0, \quad g = R.$$

Entonces la curvatura normal en la dirección $(d\theta, d\phi)$ es

$$\kappa_n = \frac{II_P(d\theta, d\phi)}{I_P(d\theta, d\phi)} = \frac{R \sin^2 \phi (d\theta)^2 + R (d\phi)^2}{R^2 \sin^2 \phi (d\theta)^2 + R^2 (d\phi)^2} = \frac{1 \sin^2 \phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2}{R \sin^2 \phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2} = \frac{1}{R}.$$

26. Sea la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + u^4 + v^6)$$

donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Determinense las secciones normales en el punto $(0, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$.

Solución: Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$ son

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 0, 2u + 4u^3), \quad \mathbf{x}_u(0, 0) = (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) = (0, 1, 6v^5), \quad \mathbf{x}_v(0, 0) = (0, 1, 0).$$

El vector normal unitario \mathbf{N} es

$$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Tenemos que considerar ahora los planos normales a la superficie, es decir, planos que contienen al vector normal en $(0, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$, $\mathbf{N}(0, 0) = (0, 0, 1)$. Vamos a suponer que el otro vector director del plano es tangente a la curva, es decir, es de la forma $(v_1, v_2, 0)$. También podemos suponer que $v_1 = \pm 1, 0$.

La ecuación paramétrica del plano es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1) + \mu(v_1, v_2, 0) \\ = (\mu v_1, \mu v_2, \lambda).$$

Donde λ, μ son los parámetros que describen el plano.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Si $v_1 = 1$, podemos hacer:

$$\begin{aligned}u &= 1 \cdot \mu \implies \mu = u, \\v &= \mu v_2 = uv_2.\end{aligned}$$

Si llamamos $u = t$, tenemos la ecuación de la curva:

$$\mathbf{x}(t) = (t, tv_2, t^2 + t^4 + (tv_2)^6).$$

Si $v_1 = -1$, el vector tangente que resulta tiene la misma dirección y sentido contrario que el vector con $v_1 = 1$ y la curva resultante sería la misma, aunque su ecuación variara.

27. Determine las curvaturas principales del cilindro de ecuación

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v).$$

Calcúlese, a partir de ellas, la curvatura de Gauss y la curvatura normal.

Determine, además, las direcciones principales.

Solución. Primero determinamos los coeficientes de las formas fundamentales. Sabemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (0, 0, 1), \\ \mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} = \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\ &= (\cos u, \operatorname{sen} u, 0).\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) = 1, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1.\end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \quad \mathbf{x}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(u, v) = (0, 0, 0).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Entonces la ecuación de las curvaturas principales es:

$$\begin{aligned}(EG - F^2) k^2 - (Eg + Ge - 2Ff) k + (eg - f^2) &= 0 \iff \\ k^2 + k &= 0 \iff \\ k(k + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son las curvaturas principales

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -1.$$

La curvatura de Gauss es:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 0,$$

y la curvatura media es

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Vamos a determinar ahora las direcciones principales a partir de su ecuación:

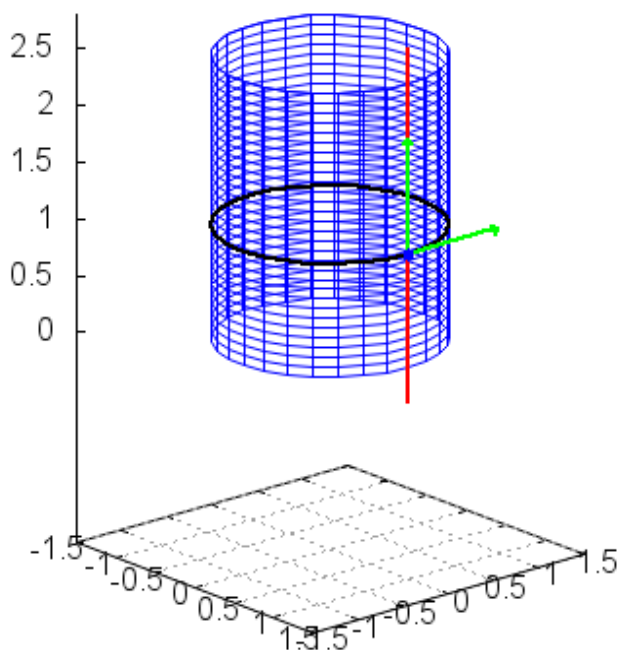
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \iff m = 0.\end{aligned}$$

Entonces, una dirección principal es $(h, 0)$. La otra dirección principal es ortogonal a esta y, por tanto, es la dirección de $(0, 1)$. La curvatura $\kappa_1 = 0$ corresponde a la dirección con curvatura mayor, que es la de v o dirección paralela al eje (en rojo en la figura). Es lo que podíamos esperar, porque es una recta con vector director $\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$. La otra dirección corresponde a $\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, que es la dirección, entre otras curvas, de la circunferencia perpendicular al eje que pasa por $\mathbf{x}(u, v)$, representada en negro en la figura. Obsérvese que es negativa, y la razón está en que el vector normal a la superficie es exterior a ella y el vector curvatura de la circunferencia tiene sentido contrario a él.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



En esta superficie, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media son constantes y valen:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 0(-1) = 0, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

28. Calcular la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de la superficie dada por $z^2 = x^2 - y^2$ en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: En un entorno de $(1, 0, 1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 - v^2})$. Entonces:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right),$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}} \end{vmatrix} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}}\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



En $(u, v) = (1, 0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(1, 0) &= (1, 0, 1), \quad \mathbf{x}_v(1, 0) = (0, 1, 0), \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (-1, 0, 1), \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \mathbf{x}_{uu}(1, 0) &= (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{uv}(1, 0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(1, 0) = (0, 0, -1).\end{aligned}$$

Podemos ya calcular los coeficientes de las formas fundamentales en $(1, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = 2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1, \\ e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (0, 0, 0) = 0, \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (0, 0, 0) = 0, \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (0, 0, -1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

La curvatura de Gauss es

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 - 0}{2} = 0.$$

La curvatura media es

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 + 0}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La ecuación de las curvaturas principales es

$$\begin{aligned}k^2(EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg &= 0 \iff \\ 2k^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}k &= 0\end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



29. Sea S el cilindro dado por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Se pide determinar las líneas de curvatura que pasan por $(1, 0, 0)$.

Solución: Sabemos que $(1, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$. También sabemos que

$$\begin{aligned} E &= 1, & F &= 0, & G &= 1, \\ e &= -1, & f &= 0, & g &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$-dudv = 0.$$

Como $dudv = 0$, entonces debe ser

$$du = 0 \text{ o } dv = 0.$$

En el primer caso:

$$du = 0 \implies u = c \in \mathbb{R}.$$

Al pasar por $(1, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$, se cumple $u = 0$ y la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = (\cos 0, \sin 0, t) = (1, 0, t).$$

Es la ecuación de la recta vertical, paralela al eje del cilindro, y que pasa por $(1, 0, 0)$.

La condición $dv = 0$ implica que debe ser constante v . Como en este punto $v = 0$, la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia, intersección del plano xy con el cilindro.

30. Sea S la superficie dada por $z = y^2 - x^2$. Se pide determinar las líneas de curvatura y líneas asintóticas que pasan por $(0, 0, 0)$.

Solución: Tenemos que determinar los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental. Hacemos, para la parametrización $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$,

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Entonces

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (2u, -2v, 1),$$

$$E = (1, 0, -2u) \cdot (1, 0, -2u) = 1 + 4u^2,$$

$$F = (1, 0, -2u) \cdot (0, 1, 2v) = -4uv,$$

$$G = (0, 1, 2v) \cdot (0, 1, 2v) = 1 + 4v^2,$$

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}},$$

$$f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0,$$

$$g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

En $(0, 0, 0)$, es

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1), \quad E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$e = -2, \quad f = 0, \quad g = 2.$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$(Ef - Fe) du^2 + (Eg - Ge) dudv + (gF - Gf) dv^2 = 0 \iff$$

$$(0 - 0) du^2 + (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)) dudv + (2 \cdot 0 - 1 \cdot 0) dv^2 = 0 \iff$$

$$4dudv = 0 \iff dudv = 0.$$

Su solución es

$$u = c, \quad v = k,$$

donde c y k son constantes.

La ecuación de las líneas asintóticas es

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0 \iff -2du^2 + 2dv^2 = 0 \implies du^2 - dv^2 = 0.$$

Esto implica

$$dv - du = 0, \quad du + dv = 0.$$

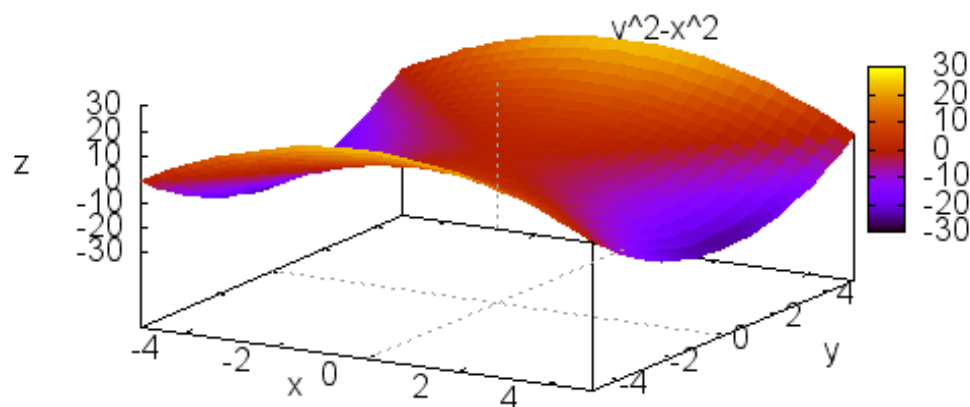
Puede dar $v = u, v = -u$. Entonces tenemos

$$x = u, y = u, z = 0; \quad x = u, y = -u, z = 0.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70