Tema II. Sucesiones de números reales.

Índice general

Capítulo 1

Tema II. Sucesiones de números reales.

1. Definición y conceptos básicos.

Empezaremos la sección con una primera subsección en la que definiremos el concepto de sucesión y estableceremos una serie de conceptos básicos que nos permitirán realizar el estudio de las mismas.

1.1. Definición de sucesión. En primer lugar, vamos a dar una definición de sucesión sobre la que se sustentarán todos los resultados que se van a exponer a lo largo del tema.

Definición 1.1. *Se llama sucesión a toda aplicación que vaya del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ a cualquier conjunto $\mathbb{W}$ no vacío. Es decir, una sucesión es una aplicación de la forma:*

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{W} \\ n &\longrightarrow a_n = a(n). \end{aligned} \tag{1}$$

En función de los elementos que conformen el conjunto $\mathbb{W}$ podemos hablar de sucesiones de números naturales (si $\mathbb{W} = \mathbb{N}$), de sucesiones de números enteros (si $\mathbb{W} = \mathbb{Z}$), sucesiones de números racionales (si $\mathbb{W} = \mathbb{Q}$), sucesiones de números reales (si $\mathbb{W} = \mathbb{R}$),...

La imagen del conjunto $\mathbb{N}$ por la aplicación a será un conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{W}$; a los elementos de dicho conjunto es a los que se les llama términos de la sucesión. Debemos destacar que estos elementos están ordenados del mismo modo que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, es decir, a_1 es el primer elemento de la sucesión, a_2 es el segundo elemento,... y así sucesivamente.

Observación 1.1. *En nuestro caso, entenderemos por sucesión a un conjunto infinito de números reales indexados, es decir, sabemos cuál es el primero, el segundo, etc. Básicamente existen dos formas de otorgar un valor numérico a cada uno de los índices: a través de una expresión analítica o relacionando, de alguna forma, un término con términos anteriores. En los siguientes ejemplos ilustramos estas dos posibilidades.*

Ejemplo 1.1. *Consideremos la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dada por:*

$$x_n = n^2 + 9{,}5. \tag{2}$$

Observamos que la expresión anterior nos permite obtener de forma directa el elemento x_n de la sucesión que se corresponde con un determinado índice n.

Ejemplo 1.2. *La conocida sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Fibonacci, es un ejemplo de sucesión que podemos definir de forma recurrente mediante la siguiente fórmula:*

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2. \tag{3}$$

En este caso, es necesario, para obtener uno de los elementos de la sucesión, disponer de los dos elementos anteriores. Por lo tanto, si queremos saber el valor del término a_{33}, debemos construír todos los anteriores. No ocurría esto con el ejemplo anterior, pues el término x_{33} se obtiene sin más que realizar la operación $33^2 + 9{,}5$.

Formalicemos las ideas anteriores en dos definiciones:

Definición 1.2. ***Definición de sucesión mediante el método analítico .*** *En este caso se representa la sucesión mediante una fórmula que proporciona cada término de la sucesión en función de su orden dentro de ella. Es decir, que la variable que aparece en la fórmula está definida en el conjunto de los números naturales, sustituyendo en ella un cierto valor n, obtendremos el término n-ésimo de la sucesión. La fórmula que da lugar a la sucesión se denomina término general de la sucesión.*

Observación 1.2. *El método analítico se suele emplear de forma muy frecuente, ya que simplifica mucho el manejo de las sucesiones. Sin embargo, también plantea limitaciones en algunos casos, ya que hay muchas sucesiones que no siguen un patrón que pueda expresarse de esta forma.*

Ejemplo 1.3. *Por ejemplo, dada una sucesión mediante su término general* $a_n = 2n - 2$*, entonces, podemos hallar cualquiera de sus términos sin más que sustituir n por el número natural correspondiente, en el caso particular del séptimo término,* $a_7 = 2 \cdot 7 - 2 = 12$*.*

Ejemplo 1.4. *Son ejemplos de sucesiónes definidas mediante el método analítico las siguientes:*

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $x_n = \dfrac{n^3}{n^4+6}$.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $x_n = \log(n^3)$.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $x_n = \dfrac{\operatorname{sen}(3n)}{n}$.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Definición 1.3. ***Definición de sucesión mediante el método recurrente*** . *Consiste en describir cada uno de los términos de la sucesión en función del término o términos precedentes.*

Observación 1.3. *Generalmente, se dispone de una fórmula para hallar los términos, pero se necesita conocer el anterior o anteriores a uno dado (y normalmente necesitamos dar explícitamente el primer o primeros términos de la sucesión). A diferencia del método descriptivo, aquí no es necesario escribir todos los términos de la sucesión, ya que existe una fórmula para hallarlos y sólo necesitamos escribir algunos de ellos.*

Ejemplo 1.5. *Como ejemplo de este método, podemos escribir la sucesión* $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1}n^2$, $n > 1$*. Es decir, los primeros términos de la sucesión serían* 3, 12, 108, 1728, ...

Ejemplo 1.6. *Dos ejemplos de sucesiónes muy importante que se definen por recurrencia son las llamadas progresiones aritméticas y geométricas:*

- ***Progresiones aritméticas****. Dada una sucesión de números reales* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, se dice que es una progresión aritmética si cada uno de los términos se puede hallar sumando una cantidad fija (que se denomina diferencia de la progresión aritmética) al témino anterior. Es decir, que si la diferencia es* d*, entonces tendremos que* $a_{n+1} = a_n + d$*. Las progresiones aritméticas pueden ser crecientes, decrecientes o constantes en función de la diferencia* d*:*
  - *Si* $d > 0$*, entonces la progresión es estrictamente creciente, ya que cada término será estrictamente mayor que el anterior* $a_{n+1} = a_n + d > a_n$*.*
  - *Si* $d < 0$*, entonces la progresión es estrictamente decreciente, ya que cada término será estrictamente menor que el anterior* $a_{n+1} = a_n + d < a_n$*.*
  - *Si* $d = 0$*, entonces la progresión es constante, ya que cada término es igual al anterior* $a_{n+1} = a_n + d = a_n$*.*
- ***Progresiones geométricas.*** *Dada una sucesión de números reales, se dice que dicha sucesión es una progresión geométrica si cada término es igual al anterior multiplicado por una constante (que se denomina razón de la progresión geométrica). Es decir, que si la razón es r, entonces tendremos que* $a_n = a_{n-1}r$*. En función del valor de la razón de la progresión se pueden dar los siguientes casos:*
  - *Si* $r > 1$*, entonces tendremos que* $|a_{n+1}| > |a_n|$*. La progresión geométrica es creciente en valor absoluto.*
  - *Si* $r < 1$*, entonces tendremos que* $|a_{n+1}| < |a_n|$*. La progresión geométrica es decreciente en valor absoluto.*

- *Si $r = 1$, entonces tendremos que $a_{n+1} = a_n$. La progresión geométrica es constante.*

1.2. Clases especiales de sucesiones. En el conjunto de las sucesiones son especialmente importantes las llamadas sucesiones monótonas; distinguiremos las sucesiones monótonas crecientes y las sucesiones monótonas decrecientes. También es necesario estudiar la posible acotación de sucesiones, tanto superior como inferior. Vamos a definir todos estos conceptos.

Definición 1.4. ***Clases especiales de sucesiones.***

- *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es monótona creciente si para todo número natural n se cumple que $a_n \le a_{n+1}$. Y se dice que es estrictamente creciente si se cumple que $a_n < a_{n+1}$.*
- *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es monótona decreciente si para todo número natural n se cumple que $a_n \ge a_{n+1}$. Y se dice que es estrictamente decreciente si se cumple que $a_n > a_{n+1}$.*
- *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que está acotada superiormente si existe un número M tal que para todo número natural n se cumple que $a_n \le M$.*
- *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que está acotada inferiormente si existe un número m tal que para todo número natural n se cumple que $a_n \ge m$.*
- *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada si está acotada superior e inferiormente.*
- *Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es no acotada si para cualquier número positivo M existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_0}| > M$.*

Observación 1.4. *A la vista de la definición anterior, es evidente que el concepto de acotación de una sucesión es equivalente a la acotación del conjunto formado por los elementos de la sucesión. Esto es, una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente (inferiormente) si y solamente si el conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ es acotado superiormente (inferiormente).*

Ejemplo 1.7. *Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante el método analítico con término general de la sucesión:*

$$a_n = \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Se tiene que

- *Es una sucesión acotada superior e inferiormente:*

$$0 \le \frac{1}{n} \le 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

- *Es una sucesión estrictamente monótona decreciente:*

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Ejemplo 1.8. *Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante el método analítico con término general de la sucesión:*

$$a_n = \frac{n}{n+1}. \tag{7}$$

Se tendrá que (la demostración se deja como ejercicio al alumno):

- *Es una sucesión acotada superior e inferiormente:*

$$0 \le \frac{n}{n+1} \le 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

- *Es una sucesión estrictamente monótona creciente:*

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

1.3. Álgebra de sucesiones. A continuación definiremos cuatro clases de operaciones básicas que se suelen dar con sucesiones: la suma, el producto, el cociente de sucesiones y la multiplicación por un escalar.

Definición 1.5. ***Operaciones con sucesiones.*** *Dadas dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un número real r, se define:*

- *La suma de sucesiones como una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = x_n + y_n$ (análogo para la diferencia de sucesiones).*
- *El producto de sucesiones como una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = x_n \cdot y_n$.*
- *Supongamos que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está formada por términos no nulos ($y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$), se define el cociente de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ente $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = \frac{x_n}{y_n}$.*
- *La multiplicación de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por un escalar $r \in \mathbb{R}$ como la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = r \cdot x_n$.*
- *El logaritmo de una sucesión de términos positivos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = \log(x_n)$.*
- *Dado un número real a y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se define la potencia de a elevado a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = a^{x_n}$ (siempre y cuando tenga sentido).*
- *La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elevado a $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = x_n^{y_n}$.*

2. Convergencia de sucesiones.

Con los conceptos que hemos definido en la sección anterior, podemos presentar ahora las nociones de límite y convergencia de una sucesión. Estos conceptos serán de capital importancia en el estudio de las sucesiones y continuidad. Comencemos entonces definiendo lo que se entiende por límite de una sucesión.

2.1. Límite de una sucesión.

Definición 1.6. ***Límite de una sucesión.*** *Dada una suceción $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:*

- *Diremos que tiene límite $L \in \mathbb{R}$ y lo denotaremos por $a_n \to L$ o por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, cuando se verifique la siguiente condición:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N, \quad |a_n - L| < \epsilon \tag{10}$$

  o, equivalentemente:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N, \quad a_n \in E(L, \epsilon). \tag{11}$$

- *Diremos que tiene límite infinito (o que tiende a infinito) y lo denotaremos por $a_n \to \infty$ o por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ cuando:*

$$\forall M \geq 0 \quad \exists N \equiv N(M) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N, \quad a_n \geq M. \tag{12}$$

- *Diremos que tiene límite menos infinito (o que tiende a menos infinito) y lo denotaremos por $a_n \to -\infty$ o por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ cuando:*

$$\forall M \geq 0 \quad \exists N \equiv N(M) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N, \quad a_n \leq -M. \tag{13}$$

Observación 1.5. *Las definiciones anteriores formalizan, desde el punto de vista matemático, la idea de límite:*

Una sucesión tiene límite L cuando los elementos de la sucesión están tan cerca como nosotros queramos de l sin más que tomar índices lo suficientemente grandes.

En los siguientes ejemplos veremos cómo aplicar la definición matemática de límite. En la práctica no emplearemos esta definición pues resulta complicado trabajar con ella y echaremos mano de las herramientas que detallaremos posteriormente.

Ejemplo 1.9. *Consideremos la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con término general:*

$$x_n = \frac{1}{n}. \tag{14}$$

La sucesión anterior tiene límite cero. Para verlo, comprobemos la condición de límite (10):

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon. \tag{15}$$

Dado un número positivo ϵ *arbitrario, lo que tenemos que hacer es encontrar un número natural* N *de forma que, a partir del índice* N*, todos los elementos de la sucesión sean más pequeños que* ϵ*. Por un lado, dado cualquier número natural* N*, se tiene que* $\forall n \geq N$*:*

$$\left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{N}. \tag{16}$$

Por lo tanto, si dado un $\epsilon > 0$ *encontramos un número natural* N *tal que* $\frac{1}{N} < \epsilon$*, habremos demostrado que el* 0 *es el límite de la sucesión. Podemos tomar, por ejemplo:*

$$N = E[\frac{1}{\epsilon}] + 1, \tag{17}$$

por definición de la parte entera, $E[\frac{1}{\epsilon}] + 1 > \frac{1}{\epsilon}$ *y, entonces,* $\frac{1}{N} < \epsilon$*.*

Ejemplo 1.10. *Consideremos la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con término general:*

$$x_n = n^2. \tag{18}$$

La sucesión anterior tiende a infinito. Para verlo, consideremos un número arbitrario $M \geq 0$ *y encontremos un número natural* N *a partir del cual los elementos de la sucesión sean tales que* $n^2 \geq M\ \forall n \geq N$*. Por ejemplo, dado un número positivo arbitrario* M*, podemos tomar* $N = E[\sqrt{M}] + 1$*.*

Ejemplo 1.11. *Consideremos la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con término general:*

$$x_n = (-1)^n. \tag{19}$$

Observamos que, dependiendo de la paridad de n, la sucesión anterior se comporta de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} 1 & n = 2k, \\ -1 & n = 2k-1. \end{cases} \tag{20}$$

En función del tipo de límite que tenga una sucesión, definimos:

Definición 1.7. ***Sucesión convergente.*** *Dada una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, diremos que es una sucesión convergente si existe* L *límite de la sucesión con* $|L| < \infty$*.*

Definición 1.8. ***Sucesión divergente.*** *Dada una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, diremos que es una sucesión divergente si es convergente a* $+\infty$ *ó* $-\infty$*.*

Definición 1.9. ***Sucesión oscilante.*** *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que es una sucesión oscilante si no es ni convergente ni divergente.*

Ejemplo 1.12. *A la vista de las definiciones anteriores, se tiene que:*

- *La sucesión* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *es convergente.*
- *La sucesión* $x_n = n^2$ *es divergente.*
- *La sucesión* $x_n = (-1)^n$ *es oscilante.*

2.2. Propiedades de las sucesiones convergentes. A continuación pasamos a enunciar un resultado que nos garantiza la unicidad del límite de una sucesión en el caso de que exista.

Proposición 1.1. *(Sobre la unicidad del límite) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $\{x_n\}_n$ es convergente se tiene que su límite es único.*

Ejemplo 1.13. *Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con término general:*

$$x_n = \cos(n\pi). \tag{21}$$

La sucesión anterior no tiene límite. Para demostrarlo, es suficiente con observar que, dependiendo de la paridad de n, se tiene que:

$$x_n = \begin{cases} 1 & n = 2k, \\ -1 & n = 2k-1. \end{cases} \tag{22}$$

Si existiese el límite este tendría que ser único.

Una propiedad muy importante de las sucesiones convergentes es que son acotadas:

Proposición 1.2. *(Acotación de las sucesiones convergentes.) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente con límite L, se tendrá entonces que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.*

Observación 1.6. *Resulta evidente que una sucesión divergente nunca puede ser acotada.*

En este punto veremos que, pasando al límite, las desigualdades válidas para los elementos de sucesiones convergentes se convierten en las desigualdades correspondientes para los límites de estas sucesiones.

Proposición 1.3. *(Paso al límite en desigualdades I). Si partiendo de un cierto número N los elementos de una sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen la desigualdad $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), entonces el límite de esta sucesión x satisface también la desigualdad $x \geq b$ ($x \leq b$).*

Observación 1.7. *Los elementos de una sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pueden verificar la desigualdad estricta $x_n > b$, pero al mismo tiempo, el límite x puede ser igual a b. Por ejemplo, si $x_n = \frac{1}{n}$, entonces $x_n > 0$, pero* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Como consecuencia de la Proposición anterior, tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 1.1. *(Paso al límite en desigualdades II). Si, partiendo de un cierto número, los elementos x_n y y_n de sucesiones convergentes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen la desigualdad $x_n \leq y_n$, entonces sus límites verifican la* *misma desigualdad:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{23}$$

Corolario 1.2. *(Paso al límite en desigualdades III). Si todos los elementos de una sucesión convergente* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se encuentran en el segmento* $[a,b]$*, entonces el límite* x *de esta sucesión se hallará también en este segmento.*

La proposición siguiente desempeña un papel fundamental en varias aplicaciones.

Proposición 1.4. *(Paso al límite en desigualdades IV). Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones convergentes que tienen límite común a. Supongamos, que, partiendo de un cierto número natural* N *los elementos de una sucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfacen las desigualdades* $x_n \leq y_n \leq z_n$*. Entonces, la sucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge y tiene límite a.*

Ejemplo 1.14. *Veamos cómo podemos emplear el resultado anterior para demostrar que la sucesión* $\{\frac{1}{n^k}\}_{n\in\mathbb{N}}$*, con* $k \in \mathbb{N}$*, es convergente con límite* 0*. Por un lado, es claro que, para cualquier número natural* k *se verifica la siguiente desigualdad:*

$$n \leq n^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

por lo tanto:

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Ahora, hemos visto al comienzo de este tema que la sucesión con término general $\frac{1}{n}$ *es convergente a* 0 *y es evidente que la sucesión constante* 0 *es convergente a* 0*, entonces, aplicando el resultado anterior:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

2.3. Álgebra de límites. Indeterminaciones. A continuación pasamos a demostrar una serie de resultados relacionados con la convergencia de operaciones realizadas con sucesiones convergentes.

Proposición 1.5. *(Convergencia de la suma de sucesiones convergentes). Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones convergentes con límites* x *e* y *respectivamente. Entonces, la sucesión suma es convergente con límite la suma de los límites:*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x + y. \tag{27}$$

Observación 1.8. *Se tiene un resultado análogo para la convergencia de la diferencia de sucesiones convergentes.*

Proposición 1.6. *(Convergencia del producto de sucesiones convergentes). Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones convergentes con límites* x *e* y *respectivamente. Entonces, la sucesión producto es convergente con límite el producto de los límites:*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cdot \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x \cdot y. \tag{28}$$

Proposición 1.7. *(Convergencia del cociente de sucesiones convergentes) Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones convergentes con límites* x *e* y *respectivamente con* $y \neq 0$*. Entonces, la sucesión cociente* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *entre* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente con límite el cociente de los límites:*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}/\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x/y. \tag{29}$$

Observación 1.9. *En la proposición anterior, la hipótesis* $y \neq 0$*, nos garantiza que, a partir de un cierto índice, los elementos de la sucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son también distintos de cero. Por lo tanto, tiene sentido el cociente (28) a partir de ese cierto índice.*

Proposición 1.8. *(Logaritmo de una sucesión convergente). Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente con límite* $x > 0$*. Entonces el logaritmo de la sucesión es también convergente con límite el logaritmo del límite:*

$$\{\log(x_n)\} \to \log(x). \tag{30}$$

Observación 1.10. *De forma similar a lo que ocurría en la proposición sobre la convergencia de sucesiones convergentes, la hipótesis sobre el límite de la sucesión,* $x > 0$*, nos garantiza que, a partir de un cierto índice los elementos de la sucesión son también estrictamente positivos. Por lo tanto, a partir de ese cierto índice, tiene sentido aplicar la función logaritmo.*

Observación 1.11. *La proposición anterior no es más que una consecuencia, tal y como veremos en la sección de continuidad de funciones reales, de la continuidad de la función logarítmica. Hemos hecho mención explícita a esta propiedad pues la emplearemos en algunos de los ejercicios.*

Proposición 1.9. *(Potencias de sucesiones). Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones convergentes con límites* x *e* y *respectivamente, con* $x > 0$*. Entonces la sucesión de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *elevado a* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente con límite* x^y*:*

$$\{x_n^{y_n}\} \to x^y. \tag{31}$$

Observación 1.12. *Como consecuencia de la proposición anterior, se desprende que la potencia de un número real positivo a una sucesión convergente, es convergente, con límite el número elevado al límite de la sucesión:*

$$\{a^{x_n}\} \to a^x. \tag{32}$$

Observación 1.13. ***Indeterminaciones.*** *Al operar algebraicamente con sucesiones que tienen límite, existen casos de indeterminación, en los que el posible límite de la sucesión resultante no queda determinado en función de los límites de las sucesiones de partida, sino que depende, también, de cómo tiendan éstas a sus límites. A continuación presentamos cuales son estas indeterminaciones:*

1. $\frac{0}{0}$.
2. $\frac{\infty}{\infty}$.
3. $0 \cdot \infty$.
4. $\infty - \infty$.
5. 0^0.
6. ∞^0.
7. 1^∞.

En una sección posterior veremos algunas de las técnicas más comunes para tratar estos casos de indeterminación.

3. Criterios de convergencia y cálculo de límites.

En la sección anterior hemos definido el concepto de límite de una sucesión y hemos visto algunos ejemplos de cómo demostrar que un número es límite de una sucesión. En esta sección veremos una serie de resultados que nos proporcionarán herramientas para demostrar la convergencia y encontrar el límite de ciertas clases de sucesiones.

3.1. Convergencias básicas. Hay unas cuantas sucesiones básicas importantes cuyo conocimiento facilita muy a menudo el estudio de otras. Este es el caso de las siguientes sucesiones:

1. Para $0 < a < 1$, $a^n \to 0$.
2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$.
3. Para $a > 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1$.
4. $\sqrt[n]{n} \to 1$.
5. $\frac{\log(n)}{n} \to 0$.

La demostración del segundo apartado es complicada y no la detallaremos, sin embargo, con los conocimientos que tenemos hasta ahora, si podemos realizar la demostración de las cuatro restantes:

1 Por un lado:

$$a^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}. \tag{33}$$

Ahora, puesto que $0 < a < 1$, se tiene que $\frac{1}{a} > 1$ y, entonces, $\left(\frac{1}{a}\right)^n \to \infty$, de donde se deduce el resultado.

3 Además:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} e^{\log(\sqrt[n]{a})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(a)}{n}} = e^0 = 1. \tag{34}$$

4 Comprobemos que $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ tiene límite 0. De la expresión que define a x_n se obtiene que $n = (1 + x_n)^n$; desarrollando esta potencia por la fórmula del binomio de Newton, se obtiene que:

$$\begin{aligned} n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} x_n^n \\ &> \binom{n}{0} + \binom{n}{2} x_n^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} n(n-1) x_n^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Por lo tanto se cumple que:

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n}}, \tag{36}$$

de donde, aplicando la regla del Sandwich, obtenemos el resultado.

5 Es una consecuencia inmediata de la anterior, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \log(\sqrt[n]{n}) = \log(1) = 0. \tag{37}$$

3.2. Sucesiones monótonas. Comenzaremos la sección estudiando un caso particular de sucesiones, las sucesiones monótonas. Para ello, tendremos en cuenta el siguiente teorema fundamental.

Teorema 1.1 (Convergencia de sucesiones monótonas.). *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales:*

- *Si la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, entonces es convergente, siendo el valor del lite $\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
- *Si la sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente, siendo el valor del límite $\beta = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Observación 1.14. *Una sucesión convergente puede ser no monótona. Por ejemplo, la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con término general* $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *converge y tiene el cero por su límite. Claramente, no es una sucesión monótona pues los signos de los elementos de la sucesión se alternan.*

Veamos a continuación algunos ejemplos de sucesiones cuyos límites se hallarán empleando el teorema central de esta sección. Además, a través de estos ejemplos, nos vamos a familiarizar con el procedimiento general para hallar límites de sucesiones dadas por fórmulas recurrentes.

Ejemplo 1.15. *Consideremos la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida de forma recurrente de la siguiente forma:*

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2, \tag{38}$$

Para resolver esta clase de ejercicios realizaremos los siguientes pasos:

1. *Comprobamos la condición necesaria, esto es, en el caso de que exista límite c de la sucesión, éste tiene que ser la solución de la ecuación algebraica resultante de tomar límites a ambos lados de la fórmula de recurrencia:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}}, \tag{39}$$

   de donde, c tiene que cumplir la siguiente ecuación algebraica:

$$c = \sqrt{2+c} \Rightarrow c^2 = 2 + c. \tag{40}$$

   En el caso de que la ecuación resultante no tenga solución, la sucesión no será convergente, si la ecuación tiene solución, tenemos que pasar al segundo paso. En nuestro caso, las soluciones de la ecuación son:

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \tag{41}$$

   como nuestra sucesión es de términos positivos, la única solución viable es:

$$c = \frac{1 + \sqrt{1+8}}{2} = 2. \tag{42}$$

   Hemos demostrado entonces que, en el caso de que la sucesión sea convergente, su límite será 2.
2. *Veamos ahora que, efectivamente, la sucesión es convergente. Para demostrar la existencia del límite de la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, demostraremos que esta sucesión es creciente y acotada superiormente.*
   - *Es una sucesión monótona creciente. Veámoslo por inducción:*
     - *Para* $n = 1$ *se tiene que* $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$*.*
     - *Supongamos que se cumple que* $x_k \leq x_{k+1}$*, entonces:*

$$x_k \leq x_{k+1} \Rightarrow x_k + 2 \leq x_{k+1} + 2 \Rightarrow \sqrt{x_k + 2} \leq \sqrt{x_{k+1} + 2}, \tag{43}$$

       de donde deducimos que $x_{k+1} \leq x_{k+2}$*.*

     Puesto que se cumplen las dos condiciones necesarias para poder aplicar el principio de inducción, deducimos que la sucesión es monótona creciente.
   - *Es una sucesión acotada. Al ser una sucesión monótona creciente, en el caso de que sea convergente, los elementos de la sucesión serán siempre menores que el límite. Por lo tanto, un buen candidato para cota superior, es el* 2*. Veamos que los elementos de la sucesión están acotados por* 2 *empleando el principio de inducción:*

- *Para $n = 1$ se tiene trivialmente que $\sqrt{2} \leq 2$.*
- *Supongamos que $x_k \leq 2$, entonces:*

(44) $$x_k \leq 2 \Rightarrow x_k + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x_k + 2} \leq 2,$$

de donde, $x_{k+1} \leq 2$.

En base al principio de inducción, deducimos que la sucesión está acotada superiormente por 2.

Ejemplo 1.16. *Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida de forma recurrente de la siguiente forma:*

(45) $$x_1 = \sqrt{3}, \quad x_n = \sqrt{3x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, seguiremos los siguientes pasos:

1. *Comprobemos la condición necesaria. Supongamos que existe límite c de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, si tomamos límites en la fórmula de recurrencia:*

(46) $$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3 \lim_{n\to\infty} x_{n-1}},$$

el supuesto límite c tendrá que cumplir la siguiente ecuación:

(47) $$c = \sqrt{3c} \Rightarrow c^2 = 3c \Rightarrow c = 0 \text{ ó } c = 3.$$

Esto es, en el caso de que la sucesión sea convergente, su límite será 0 ó 3.

2. *Veamos ahora que, efectivamente, es una sucesión convergente, para ello, veremos que es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente.*

- *Es una sucesión monótona creciente. Para demostrar la monotonía de la sucesión emplearemos el principio de inducción:*
  - *Para $n = 1$ se cumple trivialmente ya que $x_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3\sqrt{3}} = x_2$.*
  - *Supuesta la desigualdad $x_k \leq x_{k+1}$, es fácil comprobar que $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. En efecto:*

(48) $$x_k \leq x_{k+1} \Rightarrow 3x_k \leq 3x_{k+1} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{3x_k}}_{x_{k+1}} \leq \underbrace{\sqrt{3x_{k+1}}}_{x_{k+2}} \Rightarrow x_{k+1} \leq x_{k+2}.$$

El hecho de que el primer término de la sucesión sea $\sqrt{3}$ y que la sucesión sea monótona creciente, implica que el 0 nunca podrá ser el límite de la sucesión, siendo el 3 el valor del mismo en el caso de existir.

- *Es una sucesión acotada superiormente. Veamos, empleando el principio de inducción, que la sucesión es acotada superiormente por 3:*
  - *Para $n = 1$ se cumple trivialmente, ya que $\sqrt{3} \leq 3$.*
  - *Supuesto que $x_k \leq 3$, se tendrá que:*

(49) $$3x_k \leq 9 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{3x_k}}_{x_{k+1}} \leq 3.$$

En resumen, hemos visto que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, por lo tanto, convergente, siendo el valor del límite 3.

Ejemplo 1.17. *Consideremos la sucesión de números reales* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por recurrencia de la siguiente forma:*

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad y \quad x_n = \frac{2x_{n-1} + 3x_{n-2} + 1}{5}, \quad \forall n \geq 2. \tag{50}$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, empecemos comprobando la condición necesaria. Supongamos entonces que la sucesión es convergente con c como valor límite. Si tomamos límites en la fórmula de recurrencia anterior:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} + 3\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-2} + 1}{5}, \tag{51}$$

obtendremos que el supuesto valor del límite, c, tendrá que ser solución de la siguiente ecuación algebraica:

$$c = \frac{2c + 3c + 1}{5}. \tag{52}$$

La ecuación anterior no tiene solución, por lo que llegamos a una contradicción que viene de suponer que existe límite de la sucesión. Concluímos entonces que la sucesión no es convergente.

Observación 1.15. *En los ejemplos considerados hemos empleado el siguiente procedimiento que se usa frecuentemente para buscar el límite de una sucesión.*

1. *Primero comprobamos la condición necesaria. En el caso de que exista límite, éste debe ser solución de la ecuación algebraica resultante de tomar límites a ambos lados de la expresión de recurrencia. En el caso de que la citada ecuación algebraica no tenga solución, la sucesión no podrá ser convergente, si tiene solución, aún no hemos terminado pues debemos comprobar si la sucesión es convergente.*
2. *Una vez comprobada la condición necesaria, pasamos a demostrar la existencia de límite, para ello, se suelen emplear los resultados para sucesiones monótonas, pues esta clase de sucesiones lo son.*

3.3. Criterio de Stolz. En muchos casos, para investigar la convergencia del cociente $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, puede resultar útil la siguiente Teorema:

Teorema 1.2. ***Teorema de Stolz.*** *Dadas dos sucesiones de números reales* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, supongamos que se cumplen una de las dos condiciones siguientes:*

- $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente estrictamente con* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente estrictamente y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Entonces, si existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ *para l finito o infinito, se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l. \tag{53}$$

Ejemplo 1.18. *Consideremos la sucesión de números reales* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde:*

$$a_n = \frac{n^2}{n!}. \tag{54}$$

Claramente, la sucesión anterior se puede expresar como el cociente de las siguientes:

$$x_n = n^2, \qquad y_n = n!\,. \tag{55}$$

La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y divergente a $+\infty$, por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n-1)^2}{n!-(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{(n-1)!\,(n-1)} = 0. \tag{56}$$

Ejemplo 1.19. *Consideremos la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde:*

$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}. \tag{57}$$

Apliquemos el criterio de Stolz considerando:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} i, \qquad y_n = n^2. \tag{58}$$

Claramente, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y divergente a infinito, por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n-1} i}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}. \tag{59}$$

Ejemplo 1.20. *Consideremos la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con término general:*

$$a_n = \frac{n}{2^n}. \tag{60}$$

Apliquemos el criterio de Stolz con:

$$x_n = n, \qquad y_n = 2^n. \tag{61}$$

Se tendrá entonces que:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n-(n-1)}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}(2-1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0, \tag{62}$$

por lo tanto, por el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0. \tag{63}$$

Ejemplo 1.21. *Consideremos la sucesión de números reales $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con término general:*

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \tag{64}$$

con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al valor a. Entonces la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los valores aritméticos medios de los elementos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente al mismo límite a. En efecto, si ponemos $x_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$ y $y_n = n$

(es evidente que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente y no acotada), entonces* $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n$ *y puesto que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n = a, \tag{65}$$

entonces existe el límite de la sucesión $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y es igual a a.*

Observación 1.16 (Sobre la discretización de la regla de l'Hôpital.). *En cursos anteriores, el lector ya ha estudiado la regla de l'Hôpital para la resolución de indeterminaciones del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$ *y* $\frac{0}{0}$. *A grandes rasgos, dicha regla relaciona la existencia del límite del cociente de dos funciones con la del límite del cociente de sus derivadas:*

1. ***Indeterminaciones del tipo*** $\frac{0}{0}$**.**

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l. \tag{66}$$

2. ***Indeterminaciones del tipo*** $\frac{\infty}{\infty}$**.**

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,\ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l. \tag{67}$$

En nuestro caso, en lugar de funciones, tenemos sucesiones. Ahora bien, recordemos que una sucesión de números reales es en realidad una aplicación definida del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ *con valores en* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} X : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow X(n) = x_n. \end{aligned} \tag{68}$$

Por lo tanto, si queremos aproximar formalmente la derivada de la función X *en el punto n:*

$$X'(n) \simeq \frac{X(n+h) - X(n)}{h}. \tag{69}$$

La aproximación anterior será más precisa cuanto más pequeño sea h *y puesto que* X *sólo está definida en el conjunto de los números naturales, se tendrá que el valor más pequeño de* h *que podremos tomar será* $h = 1$. *Veamos entonces como sería la regla de l'Hôpital empleando la aproximación anterior en las derivadas:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{X(n)}{Y(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{X(n+1) - X(n)}{Y(n+1) - Y(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}. \tag{70}$$

3.4. Criterio del Sandwich. Para el estudio de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ frecuentemente podemos proceder tratando de encajarla entre dos sucesiones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos límites u y v son conocidos. Es decir, si:

$$u_n \leq x_n \leq v_n \tag{71}$$

para cada n, entonces, si sabemos que x_n tiene límite, resulta

$$u \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq v. \tag{72}$$

Esta información es ya útil, pero si además $u = v$, entonces es seguro que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u = v. \tag{73}$$

Veamos a continuación una serie de ejemplos en los que se empleará esta propiedad.

Ejemplo 1.22. *(Acotación del valor del límite de una sucesión empleando el criterio del sandwich). Consideremos la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con término general:*

(74)
$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1}.$$

La sucesión anterior es decreciente y tiene todos los términos positivos, por lo tanto, es acotada y convergente. Ahora, si consideramos las sucesiones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con términos generales $u_n = \frac{n}{2n-1}$ y $v_n = 1$, resulta fácil observar que $u_n \leq x_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que u_n y v_n convergen, respectivamente a $\frac{1}{2}$ y 1, resulta que:

(75)
$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq 1.$$

En resumen, aunque hemos podido acotar el valor del límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, este argumento no nos ha servido ahora para saber cuál es el límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pero al menos tenemos alguna información sobre él.

Ejemplo 1.23. *(Obtención del valor del límite de una sucesión empleando el criterio del Sandwich). Consideremos la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general es el siguiente:*

(76)
$$x_n = \sqrt[n]{n^2+n}.$$

Consideremos las sucesiones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con términos generales $u_n = \sqrt[n]{2n}$ y $v_n = \sqrt[n]{2n^2}$, es claro que:

(77)
$$\sqrt[n]{2n} \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}.$$

Pero:

(78)
$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2})(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}) = 1, \\ &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2})(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}) = 1, \end{aligned}$$

de donde deducimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

3.5. Resolución de ciertos tipos de indeterminaciones. En esta subsección analizamos cómo resolver ciertos tipos de indeterminaciones a través de una serie de ejercicios y resultados teóricos.

Ejemplo 1.24. *(Límite del cociente de polinomios en n.) Veamos cómo podemos resolver el siguiente límite:*

(79)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0}, \text{ con } a_p \neq 0, b_q \neq 0.$$

Este tipo de límite presenta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, pero es de muy sencilla resolución. Se toma el máximo de los exponentes del numerador y el denominador p y q. Llamémosle M y dividamos numerador y denominador por n^M.

(80)
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} \cdots + a_1 n + a_0}{n^M}}{\frac{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0}{n^M}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_p \frac{n^p}{n^M} + a_{p-1}\frac{n^{p-1}}{n^M} + \cdots + a_1 \frac{n}{n^M} + a_0 \frac{1}{n^M}}{b_q \frac{n^q}{n^M} + b_{q-1}\frac{n^{q-1}}{n^M} + \cdots + b_1 \frac{n}{n^M} + b_0 \frac{1}{n^M}} \end{aligned}$$

Distinguimos los siguientes casos:

1. *Si $p > q$, y, por lo tanto, $M = p$, el límite anterior se reduce a:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{p-1}} + a_0\frac{1}{n^p}}{b_q\frac{1}{n^{p-q}} + b_{q-1}\frac{1}{n^{p-q+1}} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{p-1}} + b_0\frac{1}{n^p}} \tag{81}$$

Este límite, ahora, ya no es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, puesto que el límite del numerador es $a_p \neq 0$ y el límite del denominador es 0. Por lo tanto, la sucesión diverge: si $a_p \cdot b_p > 0$, a $+\infty$, y si por el contrario $a_p \cdot b_p < 0$, divergerá a $-\infty$.

2. *Si $p < q$ y, por lo tanto, $M = q$, el límite queda:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p\frac{1}{n^{q-p}} + a_{p-1}\frac{1}{n^{q-p+1}} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{q-1}} + a_0\frac{1}{n^q}}{b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{q-1}} + b_0\frac{1}{n^q}}. \tag{82}$$

De nuevo se ha resuelto la indeterminación. En este caso, se tiene que el límite del numerador es igual a 0, mientras que el límite del denominador es b_q. Por lo tanto, si $p < q$, el límite es igual a 0.

3. *Finalmente, si $p = q = M$, tendremos que el límite es:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{p-1}} + a_0\frac{1}{n^p}}{b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{p-1}} + b_0\frac{1}{n^p}}. \tag{83}$$

Y de nuevo se resuelve la indeterminación, teniendo en este caso que el límite es igual a $\frac{a_p}{b_p}$.

Veamos cómo aplicar la técnica expuesta de forma teórica en el ejercicio anterior en un ejercicio menos teórico.

Ejemplo 1.25. *Calculemos el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde:*

$$x_n = \frac{2n^3 + 3n + 1}{n^4 + 1}. \tag{84}$$

En este caso, el máximo de los exponentes del numerador y del denominador es 4, por lo tanto, debemos dividir por n^4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n + 1}{n^4 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^4} + \frac{3n}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0} = 0. \tag{85}$$

Ejemplo 1.26. *(Límite del cociente de funciones logarítmicas.) Calculemos el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n^4 + 4n^2 - 5)}{\log(n^2 + n + 1)}. \tag{86}$$

En este tipo de límites, también del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, se utiliza una estrategia similar al ejemplo anterior, se saca factor común la máxima potencia de n, en este caso:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n^4+4n^2-5)}{\log(n^2+n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^4(3+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^4}))}{\log(n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^4)+\log(3+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^4})}{\log(n^2)+\log(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$$

(87)
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\log(n)+\log(3+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^4})}{2\log(n)+\log(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\log(n)+\log(3+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^4})}{\log(n)}}{\frac{2\log(n)+\log((1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\log(n)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\log(n)}{\log(n)}+\frac{\log(3+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^4})}{\log(n)}}{\frac{2\log(n)}{\log(n)}+\frac{\log(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\log(n)}} = \frac{4+0}{2+0} = 2$$

Ejemplo 1.27. *(Límite del cociente de potencias de n). Calculemos el siguiente límite:*

(88)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{5^{n-1}+3^n}.$$

En este caso el límite se calcula dividiendo numerador y denominador por el número con la mayor de las bases elevada a n (2, 3 y 5), resolviéndose otra indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso concreto, debemos dividir por 5^n:

(89)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{5^{n-1}+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}}{\frac{5^{n-1}}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

Como $\frac{3}{5}<1$ y $\frac{2}{5}<1$ se tendrá que $(\frac{3}{5})^n$ y $(\frac{2}{5})^n$ tienden a 0 cuando $n\to\infty$. Por lo tanto, en este caso, tenemos que el límite anterior es igual a:

(90)
$$\frac{0+0}{\frac{1}{5}+0} = 0.$$

Ejemplo 1.28. *(Resolución de indeterminaciones multiplicado y dividiendo por el conjugado). Calculemos el siguiente límite:*

(91)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}$$

En este tipo de límites en los que intervienen raíces cuadradas y la indeterminación es de tipo $\infty-\infty$ suele ser útil multiplicar y dividir la expresión por la suma de los mismos términos, de forma que en el numerador se deshacen las raíces (suma por diferencia = diferencia de cuadrados: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}$$

(92)
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1})(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1})}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+2}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-n-1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1.$$

Observación 1.17. ***Sobre las indeterminaciones en forma de potencia.*** *Supongamos que tenemos dos sucesiones* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *convergentes y que queremos calcular el límite de la sucesión* $\{x_n^{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$*, sabemos que este límite será indeterminado en los siguientes casos:*

- *Caso* 0^0.
- *Caso* ∞^0.
- *Caso* 1^∞.

La resolución del último tipo se realizará empleando un resultado que veremos posteriormente. Para la resolución de las dos primeras suele emplearse la siguiente técnica:

$$x_n^{y_n} = e^{\log(x_n^{y_n})} = e^{y_n \log(x_n)} \tag{93}$$

y, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^{\lim_{n\to\infty} y_n \log(x_n)}, \tag{94}$$

con lo que se reducen al cálculo de $\lim_{n\to\infty} y_n \log(x_n)$*, que es del tipo* $0\cdot\infty$ *y que suelen ser más fácil de abordar.*

Ejemplo 1.29. *(Resolución de indeterminaciones aplicando logaritmos). Calculemos el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} (2+3^n)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}. \tag{95}$$

Este límite, de la forma ∞^0 *es de muy difícil solución si se ataca de forma directa. Es mucho más sencillo calcular el logaritmo del límite, y después recuperar el resultado.*

$$\begin{aligned}\log(\lim_{n\to\infty} (2+3^n)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}) &= \lim_{n\to\infty} \log((2+3^n)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2+3^n)}{3+2\log(n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(3^n(\frac{2}{3^n}+1)\right)}{3+2\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(3)+\log(\frac{2}{3^n}+1)}{3+2\log(n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(3)}{3+2\log(n+1)} + \frac{\log(\frac{2}{3^n}+1)}{3+2\log(n+1)} = \infty + 0 = \infty,\end{aligned} \tag{96}$$

ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(\sqrt[n]{n})} = \frac{1}{\log(1)} = \infty. \tag{97}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} (2+3^n)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}} = e^{\log(\lim_{n\to\infty}(2+3^n)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}})} = e^\infty = \infty \tag{98}$$

Veamos a continuación un resultado que nos resultará de utilidad para la resolución de indeterminaciones del tipo 1^∞.

Proposición 1.10. *(Resolución de indeterminaciones tipo* 1^∞*). Consideremos dos sucesiones de números reales* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ *con* $x_n \neq 1\ \forall n \geq n_0$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$*. Entonces que:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^{\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1)} \tag{99}$$

Ejemplo 1.30. *(Ejemplo de resolución de indeterminación 1^∞.) Consideremos la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con término general:*

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n. \tag{100}$$

Por un lado:

$$\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2-1}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{101}$$

de donde resulta evidente que las sucesiones con término general $x_n = \frac{n^2+2n}{n^2-1}$ e $y_n = \frac{n}{2}$ están en las hipótesis del resultado anterior por lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{n^2+2n}{n^2-1}-1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{2(n^2-1)}} = e. \tag{102}$$

4. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *(Cálculo de límites de sucesiones definidas por el método recurrente.) Demostrar si las siguientes sucesiones son convergentes y, en el caso de que lo sean, calcular sus límites.*

1. $y_1 = 1$ *e* $y_n = \dfrac{2y_{n-1}+3}{4}$, *para* $n > 1$.
2. $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ *e* $y_n = \dfrac{2y_{n-1}+3y_{n-2}+1}{5}$, *para* $n > 2$.
3. $y_1 = \sqrt{3}$ *e* $y_n = \sqrt{3+y_{n-1}}$, *para* $n > 1$.
4. $y_1 = 2$ *e* $y_n = \dfrac{1}{2}\left(y_{n-1} + \dfrac{2}{y_{n-1}}\right)$, *para* $n > 1$.
5. $y_1 = 5$ *e* $y_n = \dfrac{2n}{4n+1}y_{n-1}$, *para* $n > 1$.
6. $y_1 = 3$ *e* $y_n = \dfrac{y_{n-1}^2+4}{2y_{n-1}}$, *para* $n > 1$.
7. $y_1 = 3$ *e* $y_n = \dfrac{3(1+y_{n-1})}{3+y_{n-1}}$, *para* $n > 1$.
8. $y_1 = 10$ *e* $y_n = 10 - \dfrac{9}{y_{n-1}}$, *para* $n > 1$.
9. $y_1 = 5$ *e* $y_n = \dfrac{y_{n-1}^2+10}{11}$, *para* $n > 1$.
10. $y_1 = 1$ *e* $y_n = \dfrac{3y_{n-1}}{1+y_{n-1}}$, *para* $n > 1$.

Ejercicio 1.2. *Calcular los siguientes límites.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\log(n)}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(n)}{n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[n]{n}-1}{\log(n)}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(3n^2+4n-5)}{\log(n)}$

5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$
6. $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}})$
7. $\lim_{n\to\infty} na^{-n}$, *con* $a \in (0,1)$.

Ejercicio 1.3. *(Indeterminaciones* $\frac{\infty}{\infty}$ *de cocientes de polinomios o potencias de n) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+n}-1}{\sqrt{n}}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4+3n^2+1}{n^5+3n+2}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{\sqrt[3]{n^8+2n}+3n^2}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{3n+1}}$.
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n+7}{5^n-4}$.
6. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.
7. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4^n+cos(n\pi)}{\pi^{n+1}-sen(n!\,\frac{\pi}{2})}$.

Ejercicio 1.4. *(Indeterminaciones* $\infty-\infty$*) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$.
3. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}$, *donde a, b, c y d son números reales tales que* $c \neq d$.

Ejercicio 1.5. *(Indeterminaciones* 1^∞*. Número e) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^n$.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^{2n^2+4}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n-4}}{\sqrt{n-7}}\right)^{\sqrt{n}}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$.

Ejercicio 1.6. *(Indeterminaciones* ∞^0 *y* 0^0*. Logaritmos) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left(n^2+n\right)^{\frac{1}{2n+1}}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(2+3^n\right)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k^2+1}}$.

Ejercicio 1.7. *(Indeterminaciones empleando la regla de Stolz) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2!+...+n!}{n!}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\cdots+n\sqrt[n]{n}}{n^2}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$, *siendo a un número real.*
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{n^n}{n!}\right)}{2n-1}$.
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}}{\log(n^2+n)}$.
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\log(n)}$.
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$.
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1)+\log(2)+\cdots+\log(n)}{n\log(n)}$.
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Ejercicio 1.8. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{log(n)}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{n}-1}{\log(n)}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n^2+4n-5)}{\log(n)}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.
5. $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^{n+1}})$.