Tema VIII. Cálculo integral en una variable.

Índice general

Capítulo 1

Cálculo integral en una variable.

La importancia del cálculo integral en numerosas aplicaciones geométricas, físicas y de distintas ramas de la ingeniería conduce a distintos problemas que serán abordados en el presente tema. Por una parte, el cálculo de primitivas de funciones para el que se presentarán distintos métodos analíticos. Además, el cálculo de integrales definidas, que nos permitirá abordar cuestiones como el cálculo de longitudes de arco de curva, áreas y volúmenes de revolución o valor medio de una función en un intervalo. Finalmente, veremos algunos métodos numéricos para la aproximación de integrales definidas.

1. La integral indefinida.

En esta sección veremos los conceptos más importantes relacionados con la integral indefinida.

1.1. Función primitiva.

Definición 1.1. ***Función primitiva.*** *Una función $F(x)$ se denomina función primitiva (o simplemente primitiva) de una función $f(x)$ sobre un intervalo (a,b), si en cualquier punto del intervalo (a,b), la función es diferenciable y tiene derivada $F'(x)$ igual a $f(x)$.*

Observación 1.1. *Se define, análogamente, la primitiva de una función $f(x)$ sobre la recta infinita y una semirecta abierta.*

Ejemplo 1.1. *La función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ sobre el intervalo $(-1,1)$, puesto que en cualquier punto x de este intervalo $(\sqrt{1-x^2})' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Ejemplo 1.2. *La función $F(x) = \mathrm{sen}(x)$ es la primitiva de la función $f(x) = \cos(x)$ sobre la recta infinita $(-\infty,\infty)$, puesto que en todo punto x de la recta infinita $(\mathrm{sen}(x))' = \cos(x)$.*

Ejemplo 1.3. *La función $F(x) = \log(x)$ es la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sobre la semirecta abierta $x > 0$, puesto que en todo punto x de esta semirecta, $(\log(x))' = \dfrac{1}{x}$.*

Observación 1.2. *Si $F(x)$ es primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a,b), entonces, obviamente, la función $F(x)+C$, donde C es una constante cualquiera, es también primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a,b).*
Lógicamente, surge la pregunta, cómo están relacionadas entre sí varias primitivas de una misma función $f(x)$. Para responder a esta cuestión tenemos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 1.1. *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son cualesquiera primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a,b), entonces, en todo este intervalo, $F_1(x) - F_2(x) = C$, donde C es una constante. En otras palabras, cualesquiera dos primitivas de una misma función pueden diferenciarse solamente en una constante.*

Corolario 1.1. *Si $F(x)$ es una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a,b), entonces cualquier primitiva $G(x)$ de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a,b), tiene la forma $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante.*

Ejemplo 1.4. *Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$ en $\mathbb{R}$, es claro que, entonces, todas las funciones de la forma $F(x) = \mathrm{sen}(x) + C$, con C una constante, son primitivas de la función $\cos(x)$ en $\mathbb{R}$.*

1.2. Integral indefinida.

Definición 1.2. ***Integral indefinida.*** *El conjunto de todas las primitivas de una función dada $f(x)$ sobre el intervalo (a,b) se denomina integral definida de la función $f(x)$ y se denota por el símbolo:*

$$\int f(x)dx. \tag{1}$$

El signo $\int$ se denomina signo de integral, la expresión $f(x)dx$ se llama expresión subtintegral (integrando) y la propia función $f(x)$, función subintegral (integrando).

Observación 1.3. *Si $F(x)$ es una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ en el intervalo (a,b), entonces se tiene que:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{2}$$

donde C es una constante cualquiera.

Ejemplo 1.5. *Se tiene que:*

$$\int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2} + C, \tag{3}$$

en el intervalo $-1 < x < 1$, puesto que la función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es una de las primitivas de la función $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sobre dicho intervalo.

Ejemplo 1.6. *Se tiene que:*

$$\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + C, \tag{4}$$

sobre toda la recta real $\mathbb{R}$, puesto que la función $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ en una de las primitivas de la función $f(x) = \cos(x)$ sobre toda la recta real.

1.3. Propiedades fundamentales de la integral indefinida. Ante todo, señalemos dos propiedades que se desprenden directamente de la definición de integral indefinida:

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)dx.$
2. $\int \frac{d}{dx}F(x)dx = F(x) + C.$

La primera de las propiedades significa que los símbolos d y $\int$ se reducen mutuamente si el símbolo de la diferencial está delante del símbolo de la integral. La segunda de las propiedades significa que los símbolos $\int$ y d se reducen mutuamente si el símbolo de la integral está delante del símbolo de la diferencial, pero, en este caso, hay que adicionar a $F(x)$ una constante arbitraria C. Para demostrar la primera propiedad, es suficiente con considerar la diferencial en ambos miembros se la fórmula (2) y tener en cuenta que:

$$\frac{d}{dx}F(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \tag{5}$$

Para demostrar la segunda propiedad, es suficiente con completar la igualdad:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{6}$$

en el miembro izquierdo de (2).

Las propiedades siguientes suelen denominarse **propiedades lineales** de la integral:

3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
4. $\displaystyle\int [\lambda f(x)]dx = \lambda \int f(x)dx$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ constante).

Ya que las primitivas de una misma función pueden diferenciarse solamente en una constante, entonces, para demostrar la propiedad tercera, basta con demostrar que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ y $G(x)$ es primitiva de $g(x)$, entonces la función $F(x) \pm G(x)$ es primitiva de la función $f(x) \pm g(x)$. Lo último se desprende directamente de que la derivada de la suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de estas funciones, es decir, $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$. Análogamente se demuestra la cuarta propiedad. En este caso, se emplea la igualdad $[\lambda F(x)]' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$.

1.4. Tabla de las integrales indefinidas fundamentales. Se tiene la siguiente tabla de las integrales definidas fundamentales:

1. $\displaystyle\int 0dx = C.$
2. $\displaystyle\int 1dx = x + C.$
3. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1).$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log(|x|) + C \ (x \neq 0).$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + C \ (0 < a \neq 1).$
6. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C.$
8. $\displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos(x))^2} = \int (1 + (\tan(x))^2)dx = \tan(x) + C \ (x \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}).$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{sen}(x))^2} = \int (1 + (\cot(x))^2)dx = -\cot(x) + C \ (x \neq \pi n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}).$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}(x) + C \ (\text{con} - < 1 < x < 1).$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C.$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log(|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|) + C.$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \ (|x| \neq 1).$

1.5. Métodos fundamentales de integración. En esta sección analizaremos los métodos fundamentales de integración para determinar la integral indefinida de una función.

1.5.1. Integración por cambio de variable. El cambio de variable es uno de los procedimientos más eficaces de integración. Se basa en la siguiente afirmación elemental:

Sea $t = \phi(x)$ una función definida y diferenciable en un conjunto A, siendo B el conjunto de los valores de esta función:

$$\phi : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}. \tag{7}$$

Luego, sea que para toda función $g(t)$ existe la función primitiva $G(t)$ sobre el conjunto B, es decir:

$$\int g(t)dt = G(t) + C. \tag{8}$$

Entonces, sobre todo el conjunto A, para la función $g(\phi(x))\phi'(x)$ existe la función primitiva y es igual a $G(\phi(x))$, es decir:

$$\int g(\phi(x))\phi'(x)dx = G(\phi(x)) + C. \tag{9}$$

Para demostrar esta afirmación es suficiente emplear la regla de diferenciación de la función compuesta:

$$\frac{d}{dx}[G(\phi(x))] = G'(\phi(x))\phi'(x) \tag{10}$$

y tener en cuenta que, según la definición de la primitiva, $G'(t) = g(t)$. Ahora, supongamos que se necesita calcular la integral:

$$\int f(x)dx. \tag{11}$$

Es algunos casos se logra escoger, como nueva variable, una función diferenciable $t = \phi(x)$ tal que tiene lugar la igualdad:

$$f(x) = g(\phi(x))\phi'(x) \tag{12}$$

con tal que es fálcil integrar la función $g(t)$, es decir, calcular la integral:

$$\int g(t)dt = G(t) + C. \tag{13}$$

La afirmación demostrada anteriormente permite escribir la siguiente fórmula para la integral (11):

$$\int f(x)dx = G(\phi(x)) + C. \tag{14}$$

Este procedimiento de clacular la integral (11) se denomina integración por cambio de variable.

Naturalmente, este procedimiento no se aplica a toda integral, además, cabe subrayar que la elección correcta de la sustitución depende, en modo considerable, de la habilidad del que calcula.

Ejemplo 1.7. *Calculemos la siguiente integral indefinida:*

$$\int \cos(2x)dx. \tag{15}$$

Para calcular la integral anterior, podemos hacer la sustitución más simple $t = 2x$, $dt = 2dx$. Como resultado de este cambio, obtenemos:

$$\int \cos(2x)dx = \int \frac{1}{2}\cos(t)dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t) + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x) + C. \tag{16}$$

Ejemplo 1.8. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \frac{dx}{x+a}. \tag{17}$$

Podemos calcular esta integral empleando la sustitución $t = x + a$, $dt = dx$. En este caso obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \log(|t|) + C = \log(|x+a|) + C \quad (x \neq -a). \tag{18}$$

Ejemplo 1.9. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int e^{\cos(x)} \operatorname{sen}(x) dx. \tag{19}$$

Podemos calcular esta integral haciendo la sustitución $t = \cos(x)$, $dt = -\operatorname{sen}(x)dx$. En este caso obtenemos:

$$\int e^{\cos(x)} \operatorname{sen}(x) dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos(x)} + C. \tag{20}$$

Ejemplo 1.10. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \frac{(\arctan(x))^{100}}{1+x^2} dx. \tag{21}$$

Para calcular esta integral es conveniente hacer la sustitución $t = \arctan(x)$, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$. En este caso obnemos:

$$\int \frac{(\arctan(x))^{100}}{1+x^2} dx = \int t^{100} dt = \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(\arctan(x))^{101}}{101} + C. \tag{22}$$

Ejemplo 1.11. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} dx. \tag{23}$$

Para hallar la sustitución que permite calcular esta integral, la escribimos en la forma:

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{\cos(x)dx}{(\cos(x))^2} = \int \frac{\cos(x)}{1-(\operatorname{sen}(x))^2} dx, \tag{24}$$

donde podemos realizar la sustitución $t = \operatorname{sen}(x)$, $dt = \cos(x)dx$. En este caso obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) + C = \log\left(\left|\frac{\operatorname{sen}(x)+1}{1-\operatorname{sen}(x)}\right|\right) + C. \tag{25}$$

Ejemplo 1.12. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{26}$$

Para realizar esta integral podemos realizar la sustitución trigonométrica $t = \arctan(\frac{x}{a})$, $x = a\tan(t)$, $dx = a\frac{dt}{(\cos(t))^2}$. En este caso obtenemos:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \cos(t)dt = \frac{\operatorname{sen}(t)}{a^2} + C = \frac{\tan(t)}{a^2\sqrt{1+(\tan(t))^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C. \tag{27}$$

Ejemplo 1.13. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{28}$$

Para realizar esta integral podemos realizar la sustitución $t = \operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{a})$*,* $x = a \cdot \operatorname{sen}(t)$*,* $dx = a \cdot \cos(t)dt$*. En este caso:*

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(\cos(t))^2} = \frac{\tan(t)}{a^2} + C = \frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(t))^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C. \tag{29}$$

Ejemplo 1.14. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx. \tag{30}$$

Para calcular esta integral podemos efectuar la sustitución $2t = \operatorname{arc\,cos}(\frac{x}{a})$*,* $x = a \cdot \cos(2t)$*,* $dx = -2a \cdot \operatorname{sen}(2t)dt$*. En este caso:*

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = -4a\int (\cos(t))^2 dt &= -4a\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt \\ &= -2at - 2a\int \cos(2t)dt \\ &= -2at - a\cdot \operatorname{sen}(2t) + C \\ &= -a\left[\operatorname{arc\,cos}(\frac{x}{a}) + \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + C \end{aligned} \tag{31}$$

1.5.2. Integración por partes. Entre los métodos mas eficaces de integración, figura el método de integración por partes. Se basa en la siguiente afirmación:

Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son diferenciables sobre un conjunto A y, además, existe la primitiva de la función $v(x)u'(x)$ sobre ese conjunto. Entonces, sobre el conjunto A existe también la primitiva de la función $u(x)v'(x)$, siendo válida la siguiente forma:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{32}$$

Observación 1.4. *La fórmula de integración por partes anterior, se suele escribir también de la siguiente forma:*

$$\int u dv = u(x)v(x) - \int v du, \tag{33}$$

para la que existen distintas reglas nemotécnicas.

Para demostrar que la afirmación es válida, escribamos la fórmula para la derivada del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$:

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x). \tag{34}$$

Multipliquemos la igualdad anterior por dx y tomemos la integral de ambos miembros de la igualdad obtenida. Ya que, según la condición, para todos los elementos x del conjunto A existe $\int v(x)u'(x)dx$ y $\int [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x)+C$, entonces, para todos los elementos x del conjunto A existe también la integral $\int u(x)v'(x)dx$ con tal que es válida la fórmula (32).

Observación 1.5. *La fórmula de integración por partes (32), permite sustituir el problema de calcular la integral $\int udv$ por el de calcular la integral $\int vdu$. En algunos casos concretos esta integral se calcula si dificultad.*

Veamos a continuación una serie de ejemplos de aplicación de la integración por partes para calcular la integral indefinida.

Ejemplo 1.15. *Calculemos la integral:*

$$\int x^n \log(x)dx \quad (n \neq -1). \tag{35}$$

Si definimos $u = \log(x)$, $dv = x^n dx$, se tiene entonces que $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Por lo tanto, empleando la fórmula de integración por partes:

$$\int x^n \log(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x) - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log(x) - \frac{1}{n+1}\right) + C. \tag{36}$$

Ejemplo 1.16. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int x \cdot \arctan(x)dx. \tag{37}$$

Si definimos $u = \arctan(x)$, $dv = xdx$, se tiene que $du = \frac{dx}{1+x^2}$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arctan(x)dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2+1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + C. \end{aligned} \tag{38}$$

Ejemplo 1.17. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx. \tag{39}$$

Primeramente, tomemos $u = e^{ax}$, $dv = \mathrm{sen}(bx)dx$. Obtenemos que $du = ae^{ax}dx$, $v = -\frac{\cos(bx)}{x}$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos, si llamamos $I = \int e^{ax}\cos(bx)dx$, que:

$$I = \frac{e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)dx. \tag{40}$$

Para calcular la última integral, volvamos a aplicar la fórmula de integración por partes, considerando, esta vez,

$u = e^{ax}$, $dv = \text{sen}(bx)dx$. Obtenemos que $du = ae^{ax}$, $v = -\frac{\cos(bx)}{b}$ y:

$$I = \frac{e^{ax}\,\text{sen}(bx)}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}I. \tag{41}$$

De este modo, integrando I dos veces por partes, hemos obtenido, para la integral I, una ecuación de primer orden, cuya solución es:

$$I = \frac{a\cos(bx) + b\,\text{sen}(bx)}{a^2 + b^2}e^{ax}. \tag{42}$$

La práctica muestra que la mayoría de las integrales que se calculan mediante integración por partes se pueden dividir en tres grandes grupos:

1. El primer grupo incluye las integrales cuya función subintegral comprende, como factor, una de las funciones siguientes: $\log(x)$, $\text{arc sen}(x)$, $\text{arc}\cos(x)$, $\arctan(x)$, $(\text{arc sen}(x))^2$, $\log(\phi(x))$, ... Para calcular las integrales del primer grupo, hace falta emplear la fórmula de integración por partes considerando en ella $u(x)$ igual a una de las funciones anteriormente mencionadas.
2. El segundo grupo incluye las integrales del tipo:

$$\begin{gathered} \int (ax+b)^n\cos(cx)dx, \\ \int (ax+b)^n\,\text{sen}(cx)dx, \\ \int (ax+b)^n e^{cx}dx, \end{gathered} \tag{43}$$

   donde a, b, c son constantes y n es cualquier número natural positivo. Las integrales del segundo grupo se calculan aplicando n veces la fórmula de integración por partes, considerando en cada vez, $u(x) = (ax+b)$ elevado a la potencia correspondiente. Después de toda la integración por partes esta potencia disminuye en la unidad.
3. EL tercer grupo incluye las integrales del tipo:

$$\begin{gathered} \int e^{ax}\cos(bx)dx, \\ \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)dx, \\ \int \text{sen}(\log(x))dx, \\ \int \cos(\log(x))dx. \end{gathered} \tag{44}$$

   Al denotar cualquiera de las integrales de este grupo por I, realizando dos veces la integración por partes, componemos una ecuación de primer orden para I.

Naturalmente, los tres grupos mencionados no incluyen todas las integrales, sin excepción, que se calculan mediante integración por partes. Veamos a continuación un ejemplo que no entran dentro de ninguno de los grupos anteriormente enumerados, pero que se calcula mediante el método de integración por partes.

Ejemplo 1.18. *Calculemos la siguiente integral:*

$$I = \int \frac{xdx}{(\cos(x))^2}. \tag{45}$$

Esta integral no figura en ninguno de los tres tipos mencionados. Sin embargo, si consideramos $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{(\cos(x))^2}$, *obtenemos* $du = dx$, $v = \tan(x)$*. Aplicando la fórmula de integración por partes:*

$$
\begin{aligned}
I = x \cdot \tan(x) - \int \tan(x)dx &= x \cdot \tan(x) - \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx \\
&= x \cdot \tan(x) + \int \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)} \\
&= x \cdot \tan(x) + \log(|\cos(x)|) + C.
\end{aligned} \tag{46}
$$

1.5.3. Integración de funciones racionales polinómicas. Veamos cómo se calculan la integral indefinida de funciones racionales polinómicas, es decir, integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \tag{47}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en la variable x. Por ejemplo:

$$\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 9x + 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}dx. \tag{48}$$

Puesto que las integrales que estudiaremos en las siguientes subsecciones serán reducidas a integrales de funciones racionales polinómicas, es muy importante tener claro como integrar este tipo de funciones, que por otro lado, es completamente algorítmico.

1. El primer paso es saber si podemos realizar la división del numerador del integrando $P(x)$ entre el denominador del integrando $Q(x)$. En otras palabras, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$. Si es posible realizar la división, tal y como ocurre en el ejemplo anterior, haremos la división y, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{49}$$

donde, si la división está bien hecha, el grado de $R(x)$ es menor estrictamente que el grado de $Q(x)$ y $C(x)$ es un polinomio. En el ejemplo propuesto:

$$\frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 9x + 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = 3x + 2 + \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}. \tag{50}$$

Empleando la linealidad de la integral, tenemos que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx. \tag{51}$$

La integral del polinomio $C(x)$ es inmediata, quedando solamente la integral de una función racional polinómica en la cual el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador. En el ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 9x + 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} &= \int 3x + 2 + \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} \\
&= \frac{3x^2}{2} + 2x + \int \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.
\end{aligned} \tag{52}
$$

2. Cuando no sea posible efecturar la división, continuaremos estudiando las raíces del denominador, distinguiendo cuatro situaciones posibles. Las tres primeras tienen un tratamiento similar, mientras que para la última existe un método específico (Hermite-Ostrogradski).
   a) Todas las raíces son reales y simples: En el ejemplo propuesto las raíces del denominador son 1, 3 y -2, con multiplicidad 1. Hacemos la descomposición en fracciones elementales que, en el ejemplo queda:

$$\frac{x-2}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}. \tag{53}$$

   Efectuando operaciones, podemos calcular los coeficientes A, B y C, que, en el ejemplo son $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{10}$ y $C = -\frac{4}{15}$. Finalmente, integramos las fracciones elementales, siendo inmediato este último paso, sin más que recordar la derivada de la función logaritmo neperiano.
   b) Todas las raíces son reales, algunas múltiples (puede haber raíces reales simples). Por ejemplo, el denominador del integrando de:

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{(x^3-x^2)(x-2)^3}dx \tag{54}$$

   tiene por raíces $x = 0$ (doble), $x = 1$ (simple) y $x = 2$ (triple). Hacemos la descomposición en fracciones elementales:

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{(x^3-x^2)(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3}, \tag{55}$$

   esto es, para raíces simples se sigue el mismo procedimiento que hemos hecho en el punto anterior y, para raíces múltiples, se emplean tantas fracciones con numerador indeterminado como la multiplicidad de la raíz, con denominador en grado creciente desde 1 hasta la multiplicidad de la raíz. Es importante fijarse que, además de los términos logarítmicos que aparecen por las raíces simples, también aparecen términos racionales por las raíces reales múltiples, ya que:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = \int (x-\alpha)^{-m}dx = \frac{(x-\alpha)^{1-m}}{1-m}, \quad m \neq 1. \tag{56}$$

   c) En el caso en el que tengamos raíces complejas simples (puede haber raíces reales simples y/o múltiples). Por ejemplo:

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}dx. \tag{57}$$

   Puesto que el denominador es $x^3-3x^2+7x-5 = (x-1)(x^2-5x+5)$, tiene raíces complejas simples, realizamos la descomposición en fracciones elementales:

$$\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+5}, \tag{58}$$

   esto es, para raíces reales se procede de la misma manera que anteriormente y, para cada una de las raíces complejas simples, se pone una fracción con numerador un polinomio de grado 1 con coeficientes indeterminados. Calculamos los coeficientes e integramos las fracciones elementales. Aparecerán integrales relativas a las raíces reales simples (términos logarítmicos), integrales relativas a las raíces reales múltiples (términos logarítmicos y racionales polinómicos) y integrales relativas a las raíces complejas simples, que darán lugar a la suma de una parte logarítimica y una actotangente. Para la integración de este último tipo de expresiones, por ejemplo:

(59)
$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}dx,$$

comenzamos preparando para que el numerador sea la derivada del denominador (parte logarítmica) más una constante dividida por el mismo denominador (parte arco tangente). En el ejemplo:

(60)
$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \int \frac{22}{x^2-2x+5}.$$

La primera integral es inmediata:

(61)
$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\log(x^2-2x+5),$$

restando solamente la segunda integral para terminar este caso. Prepararemos el denominador para que tenga la apariencia de la suma del número real 1 más una potencia cuadrada:

(62)
$$\int \frac{22}{x^2-2x+5}dx = \frac{11}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} = 11\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

integral que resulta ya inmediata.

d) Contiene raíces complejas múltiples (puede haber raíces reales simples y/o múltiples y raíces complejas simples). Por ejemplo,

(63)
$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx,$$

en este caso, el procedimiento, conocido como el método de Hermite-Ostrogradski, es distinto al empleado en los casos anteriores. El método de Hermite-Ostrogradski permite reducir el caso de las raíces múltiples al de las raíces simples. Aunque el método se aplica para cualquier tipo de raíces (reales o complejas) para el caso de las raíces reales múltiples no es imprescindible ya que, en esa situación, es posible utilizar la técnica descrita en apartados anteriores, aunque ésta no sirve para el caso de las raíces complejas múltiples.

Sea $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional con el grado de P menor que el grado de Q. Para utilizar este método necesitamos considerar los polinomios: $D_1(x)$ que es el máximo común divisor entre $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ y $D_2(x) = \dfrac{Q(x)}{D_1(x)}$.

El cálculo de $D_1(x)$ y $D_2(x)$ es sencillo si suponemos que ya hemos factorizado $Q(x)$. Así, suponiendo que:

(64)
$$Q(x) = M_n(x-z_1)^{\alpha_1}(x-z_2)^{\alpha_2}\cdots(x-z_k)^{\alpha_k},$$

entonces:

(65)
$$D_1(x) = M_n(x-z_1)^{\alpha_1-1}(x-z_2)^{\alpha_2-1}\cdots(x-z_k)^{\alpha_k-1}$$

y

(66) $$D_2(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_k).$$

Con estas notaciones es posible encontrar polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tales que el grado de A es menor que el grado de D_1, el grado de B es menor que el grado de D_2, y que cumplen:

(67) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A(x)}{D_1(x)}\right)' + \frac{B(x)}{D_2(x)},$$

donde la tilde en $(A/D_1)'$ denota la derivada. Los polinomios A y B pueden determinarse utilizando para ello polinomios con coeficientes genéricos que se calculan de forma concreta en cada caso a través de la ecuación (67). Aunque es posible dar una demostración de este hecho, en la práctica, lo utilizaremos en casos concretos, donde de forma efectivamente se comprobará la validez del enunciado antes formulado.

Como consecuencia de la ecuación (67), integrando:

(68) $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A(x)}{D_1(x)} + \int \frac{B(x)}{D_2(x)}dx.$$

Debemos observar que D_2 solamente tiene raíces simples, por lo que el cálculo de $\int \frac{B(x)}{D_2(x)}dx$ se reduce a los casos estudiados.

Ejemplo 1.19. *Calculemos la siguiente integral:*

(69) $$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx.$$

En este caso el polinomio del denominador ya está factorizado, pues no existen raíces reales de $x^2 + 1 = 0$*. Así que, en esta ocasión:*

(70) $$D_1(x) = (x^2+1)^2, \quad D_2(x) = (x^2+1)$$

y, entonces,

(71) $$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(x^2+1)^2} + \int \frac{Ex+F}{(x^2+1)}dx.$$

Para calcular los coeficientes desconocidos, derivamos la igualdad anterior:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^3} &= \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right)' + \frac{Ex+F}{(x^2+1)} \\
&= \frac{3\,A\,x^2+2\,B\,x+C}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{4\,x\,\left(C\,x+A\,x^3+B\,x^2+D\right)}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{E\,x+F}{(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}\Big(C+2\,B\,x+3\,A\,x^2+3\,A\,x^4+2\,B\,x^3+C\,x^2 \\
&\quad -(4\,x\,D+4\,A\,x^4+4\,B\,x^3+4\,C\,x^2) \\
&\quad +E\,x^5+F\,x^4+2\,E\,x^3+2\,F\,x^2+E\,x+F\Big) \\
&= \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}\Big(E\,x^5+(F-A)\,x^4+(2E-2B)\,x^3+(3A-3C+2F)\,x^2 \\
&\quad +(2B-4D+E)\,x+C+F\Big),
\end{aligned}
\tag{72}
$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
E &= 0\\
F-A &= 0\\
2E-2B &= 0\\
3A-3C+2F &= 0\\
2B-4D+E &= 0\\
C+F &= 1,
\end{aligned}
\tag{73}
$$

cuya solución es $A = 3/8 = F$, $B = D = E = 0$ *y* $C = 5/8$. *Por lo tanto:*

$$
\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{3\,x^3+5\,x}{8(x^2+1)^2} + \int \frac{3}{8(x^2+1)}dx = \frac{3\,x^3+5\,x}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\arctan(x). \tag{74}
$$

1.5.4. Integración de funciones trigonométricas. En genral, para el cálculo de primitivas de funciones que involucren funciones trigonométricas (circulares o hiperbólicas), es necesario tener ciertos conocimientos sobre trigonometría circular e hiperbólica.

1. **Integración de funciones racionales trigonométricas.** Comenzamos estudiando integrales de funciones racionales trigonométricas, esto es, integrales del tipo:

$$
\int \frac{(\cos(x))^4+(\operatorname{sen}(x))^3+33}{1+\cos(x)+(\tan(x))^2}dx, \tag{75}
$$

que, de manera general, serán denotadas por:

$$
\int R(\operatorname{sen}(x),\cos(x))dx. \tag{76}
$$

Una posible forma de abordar este tipo de integrales es la siguiente:

a) Si el integrando es una función impar en $\operatorname{sen}(x)$, recomendamos el cambio de variable $t = \cos(x)$. Esto es, si:

$$
R(-\operatorname{sen}(x),\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x),\cos(x)), \tag{77}
$$

entonces, realizamos el cambio de variable $t = \cos(x)$:

(78) $$t = \cos(x) \Rightarrow \begin{cases} dt = -\operatorname{sen}(x)dx, \\ 1 - t^2 = 1 - (\cos(x))^2 = (\operatorname{sen}(x))^2. \end{cases}$$

b) Si el integrando es una función impar en $\cos(x)$, recomendamos el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. Esto es, si

(79) $$R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)),$$

entonces, realizamos el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$:

(80) $$t = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow \begin{cases} dt = \cos(x)dx, \\ 1 - t^2 = 1 - (\operatorname{sen}(x))^2 = (\cos(x))^2. \end{cases}$$

c) Si el integrando es una función impar en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ (equivalentemente, par en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$), recomendamos el cambio de variable $t = \tan(x)$. Esto es, si:

(81) $$R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)),$$

entonces, realizamos el cambio de variable $t = \tan(x)$:

(82) $$t = \tan(x) \Rightarrow \begin{cases} x = \arctan(x), \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \\ 1 + t^2 = 1 + (\tan(x))^2 = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}, \\ (\cos(x))^2 = \dfrac{1}{1+t^2}, \\ (\operatorname{sen}(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2 = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

d) En cualquiera de los casos ya comentados y en los que no se correspondan con ellos, recomendamos probar con el cambio de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$:

(83)
$$t = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\arctan(t), \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \\ t^2 = (\tan(\dfrac{x}{2}))^2 = \dfrac{(\mathrm{sen}(\frac{x}{2}))^2}{(\cos(\frac{x}{2}))^2} = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}, \\ (1+\cos(x))t^2 = 1-\cos(x) \Rightarrow \cos(x)(1+t^2) = 1-t^2, \\ \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \mathrm{sen}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Ejemplo 1.20. *Para calcular la integral:*

(84)
$$\int \frac{dx}{\mathrm{sen}(x)},$$

emplearemos el cambio de variable universal ($t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$) y, entonces:

(85)
$$\int \frac{dx}{\mathrm{sen}(x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} \log(|t|) + k = \log\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + k.$$

2. Integración de funciones de la forma $\mathrm{sen}^m(x)\cos^n(x)$. Para este tipo de integrales es posible realizar los cambios de variable descritos en el punto anterior. Además, en ciertas ocasiones, puede resultar útil acordarse de que:

(86)
$$(\mathrm{sen}(x))^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad (\cos(x))^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Ejemplo 1.21. *Para calcular*

(87)
$$\int (\mathrm{sen}(x))^2(\cos(x))^2 dx,$$

emplearemos las relaciones trigonométricas antes mencionadas:

(88)
$$\int (\mathrm{sen}(x))^2(\cos(x))^2 dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{4}\int 1-(\cos(2x))^2 dx.$$

Puesto que:

(89)
$$(\cos(2x))^2 = \frac{1+\cos(4x)}{2},$$

la integral se reduce a una integral inmediata.

3. Integración de funciones de la forma $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)$. Para calcular este tipo de integrales es recomendable acordarse de las llamadas transformaciones de sumas en productos:

(90)
$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \\ \operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y). \end{aligned}$$

Empleando de forma apropiada las relaciones anteriores, es posible calcular las integrales de funciones de la forma $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)$.

Ejemplo 1.22. *Calculemos la siguiente integral:*

(91)
$$\int \operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(3x)dx,$$

para ello, de las anteriores relaciones, se obtiene:

(92)
$$2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

y, por lo tanto:

(93)
$$\int \operatorname{sen}(7x)\operatorname{sen}(3x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(4x) - \cos(10x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} - \frac{\operatorname{sen}(10x)}{10}\right) + k.$$

1.5.5. Integración de funciones irracionales. Otra clase de integrales son las denominadas integrales irracionales, esto es, integrales en las cuales el integrando es una función irracional. La mayor parte de las veces se realiza un cambio de variable que las reduce a integrales del tipo racional polinómico o trigonométricas.

1. Integrales de funciones del tipo $R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$. Con el objeto de transformar la integral dada en una integral de una función racional polinómica, se sugiere el cambio de variable $x = t^k$, donde k es el mínimo común múltiplo de los denominadores, $k = m.c.m.\{n, \ldots, s\}$, y de esta forma eliminamos los denominadores.

Ejemplo 1.23. *Calculemos la siguiente integral:*

(94)
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1},$$

para ello, observamos que la variable x aparece elevada a $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ y, entonces, con el cambio de variable $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, resulta:

(95)
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \int \frac{t^2}{t^3+1}4t^3dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt.$$

Despues de integrar la función racional polinómica, obtenemos:

(96)
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - log(|\sqrt[4]{x^3}+1|)\right) + k.$$

2. Integrales de funciones del tipo $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$. Para resolver esta clase de integrales se suele realizar el cambio de variable:

$$t^k = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{97}$$

donde k es el mínimo común múltiplo de los denominadores, eliminando de esta manera las potencias racionales y convirtiendo la integral en una integral del tipo racional polinómico.

Ejemplo 1.24. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx, \tag{98}$$

para ello, consideraremos el siguiente cambio de variable:

$$x + 4 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt. \tag{99}$$

Se tiene que:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2-4} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2-4} dt, \tag{100}$$

integrando la función racional polinómica resultante:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\left(\sqrt{x+4} + \log\left(\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)\right) + k. \tag{101}$$

3. Otros tipos de integrales irracionales. Tan solo mencionar, para terminar esta pequeña introducción al cálculo de integrales indefinidas, otros tipos elementales de transformaciones que permiten calcular ciertos tipos de integrales irracionales. Estas transformaciones se basan en las relaciones fundamentales de la trigonometría circular e hiperbólica:

$$(\cos(x))^2 + (\mathrm{sen}(x))^2 = 1, \quad (\cosh(x))^2 - (\mathrm{senh}(x))^2 = 1. \tag{102}$$

Ejemplo 1.25. *Calculemos la siguiente integral:*

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \tag{103}$$

para ello, efectuaremos el cambio de variable $x = \cos(t)$, $dx = -\,\mathrm{sen}(t)dt$, resultando:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = -\int (\mathrm{sen}(t))^2 dt. \tag{104}$$

La integral anterior es fácilmente calculable empleando integración por partes o bien empleando que:

$$(\mathrm{sen}(t))^2 = \frac{1-\cos(2t)}{2}. \tag{105}$$

1.5.6. Funciones con primitiva no expresable como combinación de lineal de funciones elementales. En las secciones anteriores hemos presentado algunas técnicas elementales para el cálculo de primitivas de ciertos tipos de funciones. Existen además distintas funciones cuya primitiva no se puede expresar como combinación lineal de funciones elementales, por ejemplo:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx, \quad \int \frac{\cos(x)}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\log(x)} dx. \tag{106}$$

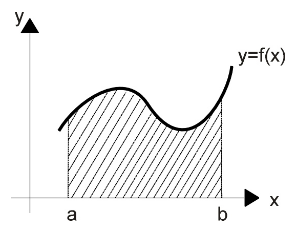
Los ejemplos anteriores corresponden con integrales que aparecen con bastante frecuencia en las aplicaciones. Por ejemplo, en la distribución normal o de Gauss, se trabaja con integrales del tipo:

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt \tag{107}$$

y como acabamos de mencionar, no es posible expresar una primitiva del integrando como combinación lineal de funciones elementales. En consecuencia, es necesario desarrollar técnicas que permitan el cálculo aproximado de este tipo de integrales.

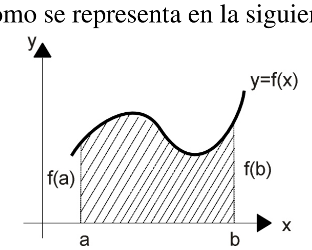
2. La integral definida.

El cálculo integral fue desarrollado para resolver el problema de hallar el área encerrada por una curva. Utilizando un lenguaje propio de esta asignatura podemos formular el problema del siguiente modo: dada una función continua en un intervalo $[a, b]$, se trata de obtener el área sombreada de la figura siguiente, que se conoce como **área bajo la curva**.



En esta sección estudiaremos el cálculo de áreas de regiones planas como una aplicación de la **integral definida**. Este concepto tiene además numerosas aplicaciones que se pueden extender al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, de áreas de cuerpos de revolución, de momentos de inercia, etc. Se trata, entonces, de un número muy elevado de aplicaciones para la ingeniería mecánica.

2.1. Sumas de Riemann. Consideremos una función $f : x \in [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real de variable real acotada y no negativa en el intervalo $[a, b]$ tal y como se representa en la siguiente figura:

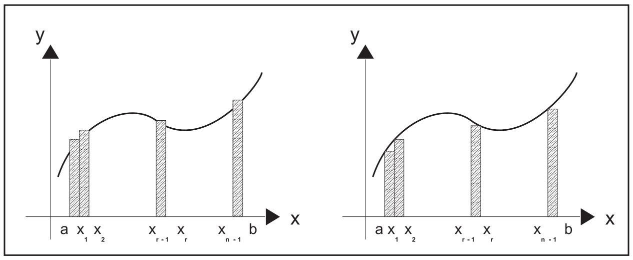


Nos planteamos calcular el área delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Para obtener una aproximación del área, definimos una **partición** $\mathscr{P}_n$ del intervalo $[a, b]$, como una colección finita de puntos $\mathscr{P}_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \tag{108}$$

y dividimos el área bajo la curva en n rectángulos mediante líneas verticales en los puntos de la partición, como se muestra en la siguiente figura:



Obtenemos una aproximación del área al sumar las áreas de todos los rectángulos, donde la base del rectángulo r-ésimo es la longitud del sub-intervalo $[x_{r-1}, x_r]$, que denotamos por:

(109) $$\Delta x_r = x_r - x_{r-1}, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Para cada sub-intervalo, consideramos un valor x_r^* arbitrario tal que:

(110) $$x_r^* \in [x_{r-1}, x_r], \quad r = 1, \ldots, n$$

y construimos la suma:

(111) $$S(\mathscr{P}_n, f) = \sum_{r=1}^{n} f(x_r^*)\Delta x_r,$$

llamada suma de Riemann, que se corresponde con la suma de las áreas de los rectángulos que tienen longitud de la base Δx_r y altura $f(x_r^*)$.

Definición 1.3. ***Suma de Riemann.*** *Dado un intervalo $[a, b]$, una partición de dicho intervalo $\mathscr{P}_n$ y una función $f : x \in [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real de variable real acotada en $[a, b]$, se define la suma de Riemann de f en $[a, b]$ de la siguiente forma:*

(112) $$S(\mathscr{P}_n, f) = \sum_{r=1}^{n} f(x_r^*)\Delta x_r, \quad \textit{donde} \quad x_r^* \in [x_{r-1}, x_r].$$

Definición 1.4. ***Función integrable.*** *Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, una colección de particiones $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una función $f : x \in [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real de variable real acotada en $[a, b]$, se dice que $f(x)$ es Riemann-integrable en el intervalo $[a, b]$ si existe el siguiente límite, independientemente de la elección de los puntos $x_r^* \in [x_{r-1}, x_r]$:*

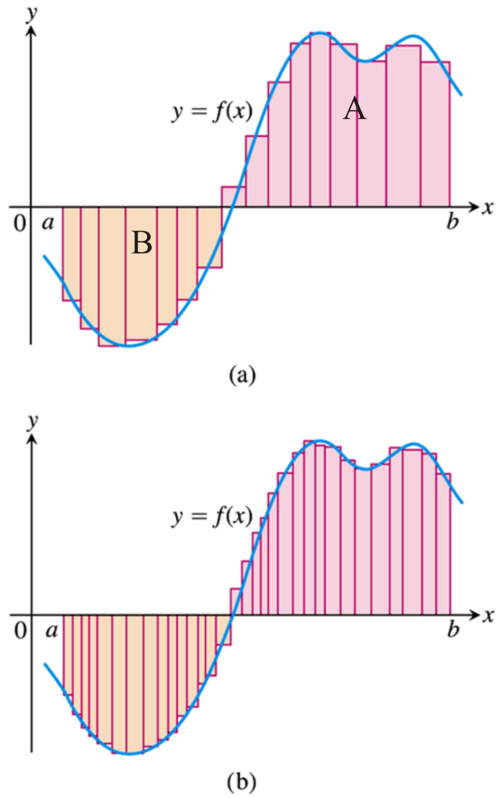
(113) $$\lim_{n\to\infty} S(\mathscr{P}_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r^*)\Delta x_r.$$

Si existe el límite anterior, este se le denomina integral definida de f en $[a, b]$, o integral de Riemann, y se denota por:

(114) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r^*)\Delta x_r.$$

Observación 1.6. *Debemos tener en cuenta las siguientes observaciones:*

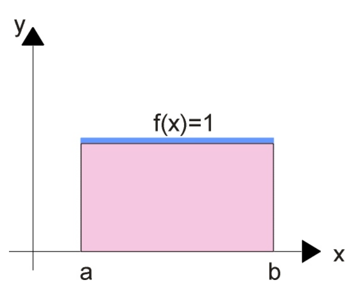
- *Cuando $n \to \infty$, más áreas de rectángulos se suman y, por lo tanto, mejor se aproxima el área bajo la curva.*
- *La definición de integral de Riemann es válida para funciones con signo arbitrario, no es necesario que la función sera no negativa (ver la siguiente figura).*



- *En el caso de la función de la figura anterior con la integral definida se calcula el área algebraica:*

(115) $$\int_a^b f(x)\,dx = \acute{a}rea(A) - \acute{a}rea(B).$$

Ejemplo 1.26. *Dado un intervalo $[a, b]$ arbitrario, consideremos la función constante $f(x) = 1$.*



Para el intervalo $[a, b]$ anterior, definamos la siguiente colección de particiones:

(116) $$\mathscr{P}_n = \{x_0, \dots, x_n\},$$

donde $x_0 = a$ y, $\forall k = 1, \dots, n$, $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ (resulta evidente que, en este caso, $\Delta x_r = x_r - x_{r-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall r = 1, \dots, n$). Veamos cómo construir la suma de Riemann asociada a la función:

$$
\begin{aligned}
S(\mathscr{P}_n, f) &= \sum_{r=1}^{n} f(x_r^*)\Delta x_r, \quad x_r^* \in [x_{r-1}, x_r] \\
&= \sum_{r=1}^{n} 1 \frac{b-a}{n} \\
&= 1(b-a).
\end{aligned} \tag{117}
$$

En este caso particular, es evidente que la función es Riemann integrable, ya que, se puede demostrar que, para cualquier partición del intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann correspondiente es siempre igual a $(b-a)$ y, por lo tanto, existe el límite:

$$\int_a^b 1 dx = \lim_{n\to\infty} S_n(\mathscr{P}_n, f) = (b-a). \tag{118}$$

A continuación pasamos a demotrar un resultado fundamental que nos garantiza que cualquier función continua es Riemann-integrable.

Teorema 1.2. *Dado un intervalo $[a, b]$ y una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, se tiene que f es Riemann-integrable en $[a, b]$ (toda función continua es Riemann-integrable).*

Teorema 1.3. *(Propiedades básicas de las funciones integrables I.) Se tienen las siguientes propiedades de las funciones Riemann integrables:*

1. ***Aditividad con respecto a la función.*** *Sean $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b]$, se cumple que:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{119}$$

2. ***Aditividad con respecto al intervalo.*** *Sea $f : [a, c] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en los segmentos $[a, b]$ y $[b, c]$, con $a < b < c$. Entonces, f es integrable en $[a, c]$ y, además, se cumple que:*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{120}$$

3. ***Monotonía con respecto a la función.*** *Sean $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b]$ tales que $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, se cumple que:*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{121}$$

4. ***Monotonía con respecto al intervalo.*** *Sea $f : [a, c] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, c]$ y sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b < c$, se cumple que:*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^c f(x)dx. \tag{122}$$

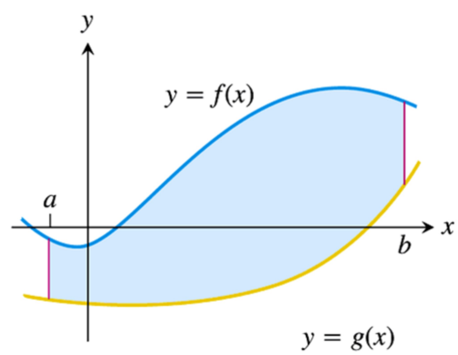
Teorema 1.4. *(Propiedades básicas de las funciones integrables II). Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$, entonces también será Riemann integrable en cualquier sub-intervalo $[a', b'] \subset [a, b]$.*
2. *Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$ tal que, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \ge 0$, entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0. \tag{123}$$

3. *Si f y g continuas en $[a,b]$ son tales que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$, entonces el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g es la integral de $(f-g)$ entre a y b:*

$$\text{Área} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \tag{124}$$



4. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$, entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{125}$$

5. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$, entonces:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{126}$$

Observación 1.7. *Es común, en problemas relacionados con la física, que ciertos resultados se expresen en forma integral. Puesto que determinar las unidades de una cierta magnitud física es una cuestión de gran importancia, veamos cómo se comportan las unidades con respecto a la integral. Dada una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann integrable en $[a,b]$ con unidades $[f]$, dependiente de la variable x con unidades $[x]$, desde la definición de integral definida se tiene que:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r^*)\Delta x_r, \tag{127}$$

entonces, las unidades de la integral son:

$$\left[\int_a^b f\, dx\right] = [f] \cdot [x]. \tag{128}$$

2.2. Resultados fundamentales del cálculo integral. En esta sección veremos de alta importancia desde el punto de vista teórico y práctico. En primer lugar, una relación entre derivación e integración. Además, la Regla de Barrow permite evaluar una integral definida si conocemos una primitiva del integrando, sin tener que recurrir a las sumas de Riemann.

Teorema 1.5. *(Teorema fundamental del cálculo integral.) Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real continua en $[a,b]$. Entonces, la función:*

$$\begin{array}{rcl} F : [a,b] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt, \end{array} \tag{129}$$

es derivable en el intervalo $[a,b]$ *y se cumple que:*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x). \tag{130}$$

Observación 1.8. *Debemos tener en cuenta las siguientes observaciones:*

- *El Teorema Fundamental del Cálculo integral afirma que, bajo ciertas hipótesis, la derivación y la integración son operaciones inversas.*
- *Además, para cualquier función* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$*, siempre es posible calcular una primitiva. Dicha primitiva* ($F(x)$) *se obtiene realizando la siguiente integral definida:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{131}$$

Teorema 1.6. *(Regla de Barrow.) Sea* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$ *y sea* $F(x)$ *una primitiva de* f *en* $[a,b]$*, entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{132}$$

Observación 1.9. *La Regla de Barrow nos permite calcular la integral definida de una funciń* f*, empleando una primitiva de dicha función sin tener que recurrir a las sumas de Riemann.*

Ejemplo 1.27. *Calculemos:*

$$\int_1^4 (2x+3)dx. \tag{133}$$

Para ello, apliquemos la Regla de Barrow con $a = 1$*,* $b = 4$*,* $f(x) = 2x + 3$ *y* $F(x) = x^2 + 3x$*:*

$$\int_1^4 (2x+3)dx = F(4) - F(1) = \left[x^2 + 3x\right]_1^4 = 28 - 4 = 24. \tag{134}$$

Ejemplo 1.28. *Calculemos las siguientes integrales:*

- $\displaystyle\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}.$
- $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_2^4 = \left(\frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta = [-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 1.$
- $\displaystyle\int_{-1}^{+1} e^{-2x} dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{+1} = \left(\frac{-1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{-1}{2}e^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^{-2}\right).$
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$

Observación 1.10. *Es conveniente recordar las siguientes relaciones trigonométricas:*

- $\operatorname{sen}(x)\ \operatorname{sen}(y) = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$
- $\cos(x)\ \cos(y) = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)].$
- $\operatorname{sen}(x)\ \cos(y) = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)].$

Ejemplo 1.29. *Veamos la siguiente igualdad:*

$$I = \frac{2}{l}\int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0\ si & n \neq m, \\ 1\ si & n = m. \end{cases} \tag{135}$$

Esta propiedad indica que las soluciones de la ecuación de Schrödinger para una partícula en un pozo de potencial unidimensional de longitud l, dadas por:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{136}$$

*son **ortonormales** (ortogonales y normalizadas). En efecto:*

- *Si $m \neq n$ entonces:*

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{l}\int_0^l \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right] dx \\ &= \frac{2}{l}\left[\frac{l}{(m-n)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi x}{l}\right) - \frac{l}{(m+n)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right]_0^l = 0. \end{aligned} \tag{137}$$

- *Si $m = n$ entonces:*

$$I = \frac{2}{l}\int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l}\frac{1}{2}\int_0^l \left[1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right] dx = \frac{1}{l}\left[x - \frac{l}{2n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right]_0^l = 1 \tag{138}$$

Teorema 1.7. *(Regla de Leibniz.) Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $u(x)$, $v(x)$ dos funciones derivables con valores en $[a,b]$. Entonces:*

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \tag{139}$$

es derivable en $[a,b]$ y:

$$G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x) \tag{140}$$

Ejemplo 1.30. *Calcular $G'(x)$, siendo*

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{x^2}^{0} \cos(t)dt \quad &\Rightarrow \quad G'(x) &= \cos(0)\cdot 0' - \cos(x^2)\cdot 2x = -2x\cos(x^2). \\ G(x) &= \int_{\operatorname{sen}(x)}^{x^2} (1+t^2)dt \quad &\Rightarrow \quad G'(x) &= (1+x^2)\cdot 2x - (1+\operatorname{sen}^2(x))\cdot\cos(x). \\ G(x) &= \int_1^{e^x} \frac{1}{t}dt \quad &\Rightarrow \quad G'(x) &= \frac{1}{e^x}e^x = 1. \end{aligned} \tag{141}$$

2.3. Aplicaciones de la integral definida. En esta sección veremos las aplicaciones más importante de la integral definida de funciones reales de variable real.

2.3.1. Cálculo de áreas de regiones planas. En esta sección veremos como calcular el área de regiones planas determinadas por funciones reales de variable real.

1. Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. El área de la región delimitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y $y = f(x)$ viene determianda por la siguiente integral definida:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{142}$$

2. Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reales de variable real, el área de la región delimitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ viene determinada por la siguiente integral definida:

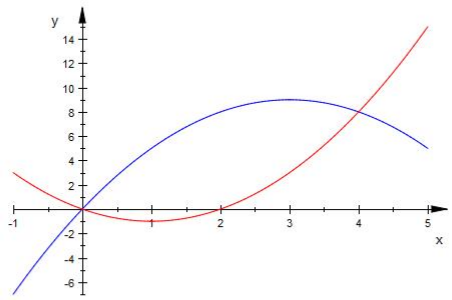
$$A = \int_{c_1}^{d_1} |f(x) - g(x)|\, dx, \tag{143}$$

suponiendo que f y g se cortan en los puntos (c_1, c_2) y (d_1, d_2).

Ejemplo 1.31. *Para calcular el área entre la curva $y = sen(x)$, $x = 0$, $x = 2\pi$ y $y = 0$, efectuamos:*

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)| dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen}(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = \tag{144}$$
$$-\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) = 4.$$

Ejemplo 1.32. *Para calcular el valor del área de la región limitada por las curvas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$, tenemos en cuenta que los cortes se producen en los puntos $(0, 0)$ y $(4, 8)$:*

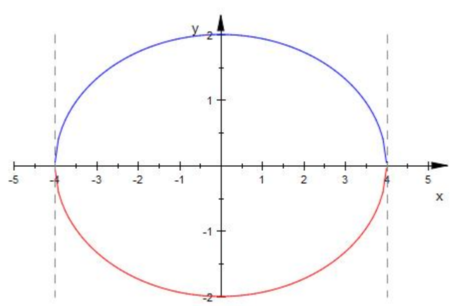


$$A = \int_0^4 \left|6x - x^2 - x^2 + 2x\right| dx = \int_0^4 \left|-2x^2 + 8x\right| dx = \frac{64}{3}. \tag{145}$$

Ejemplo 1.33. *Calculemos el área de la región plana delimitada por la elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{146}$$

donde a y b son números reales positivos. Por ejemplo, en el caso particular $a = 4$ y $b = 2$ tenemos la siguiente gráfica:



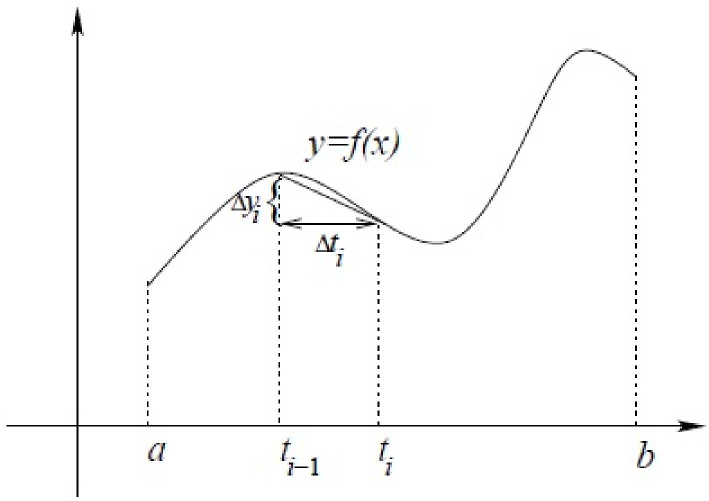
Entonces, por un lado:

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{147}$$

Por lo tanto, para calcular el área de la elipse, debemos determinar el área de la región delimitada por las curvas $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ e $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Dichas curvas se cortan en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y, entonces, el área de la *elipse es:*

$$A = \int_{-a}^{a} \left| b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right| dx = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{2b}{a}\frac{\pi a^2}{2} = \pi ab. \tag{148}$$

2.3.2. Cálculo de la longitud del arco de una curva.



Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real continua y diferenciable en $[a,b]$. La longitud del arco de curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, viene dada por:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx. \tag{149}$$

La justificación de esta fórmula, con la ayuda de las sumas de Riemann es la siguiente: Sea $\mathscr{P}_n = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. En el gráfico anterior se puede que, para cualquiera de los subintervalos $[t_{j-1}, t_j]$, tenemos un triángulo rectángulo, de catetos $\Delta y_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ y $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. La longitud del arco comprendido entre t_{i-1} y t_i, puede ser aproximado por la hipotenusa del triángulo rectángulo antes mencionado:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta t_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta t_i \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta t_i)^2}}. \tag{150}$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, a la función f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$,

$$f'(c_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}, \tag{151}$$

donde $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Por lo tanto, podemos aproximar la longitud ΔL_i mediate:

$$\Delta L_i = \Delta t_i \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}, \tag{152}$$

donde c_i es un punto del intervalo (t_{i-1}, t_i) y, por lo tanto, la longitud total podería ser aproximada por:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}. \tag{153}$$

Ejemplo 1.34. *Para calcular la longitud de arco de una parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ entre el origen de coordenadas y el punto de abscisa $x = 5a$, debemos resolver la siguiente integral definida:*

$$L = \int_0^{5a} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} dx = \int_0^{5a} \sqrt{\frac{4a + 9x}{4a}} dx = \frac{335}{27} a. \tag{154}$$

2.3.3. Cálculo del área de una superficie de revolución. Nos ocupamos aquí del área de una superficie de revolución S que engendra la curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$, al girar alrededor del eje X. Dicha área viene dada por:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{155}$$

La justificación de la fórmula anterior se realiza de una forma similar a la que hemos realizado en el caso del cálculo de la longitud del arco de una curva, con la salvedad de que, ahora, en lugar de aproximar la longitud de la curva mediante la suma de las longitudes de los segmentos que unen los puntos asociados a las particiones, se aproximará la superficie mediante la suma de las áreas de los troncos de cono asociados a cada una de las particiones.

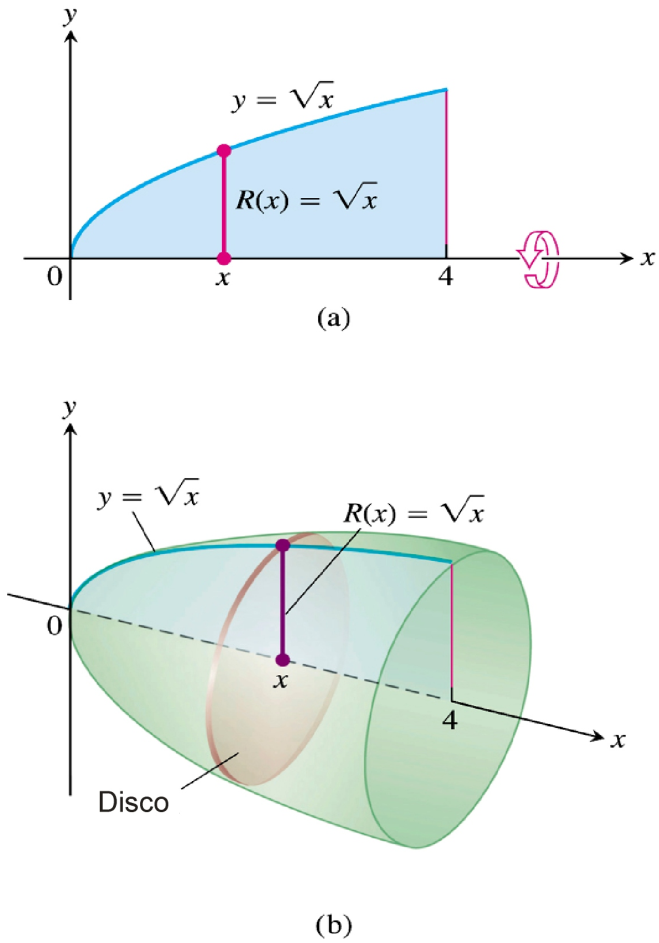
Ejemplo 1.35. *Calculemos el área A de la superficie que engendra, al girar alrededor del eje X el arco de la curva:*

$$y = aCh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{156}$$

que se obtiene para $x \in [0, c]$:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^c a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = 2\pi a \int_0^c \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) dx. \\ &= \frac{2\pi a}{2} \left[x + \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^c = \frac{\pi a}{2} \left(2c + \operatorname{senh}\left(\frac{2c}{a}\right)\right). \end{aligned} \tag{157}$$

2.3.4. Cálculo de volúmenes de revolución (eje X)..



Empleando las sumas de Riemann, tal y como se detallaba en la subsección anterior, se puede demostrar que:

$$\Delta V = \pi (R(x))^2 \Delta x. \tag{158}$$

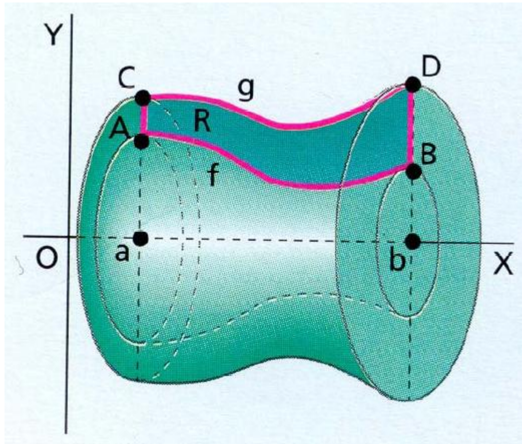
Por lo tanto:

$$\text{Volumen} = \int_a^b \pi (R(x))^2 dx. \tag{159}$$

En el caso particular de la figura (b), el volumen del sólido de revolución viene dado por:

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2}\right) = 8\pi. \tag{160}$$

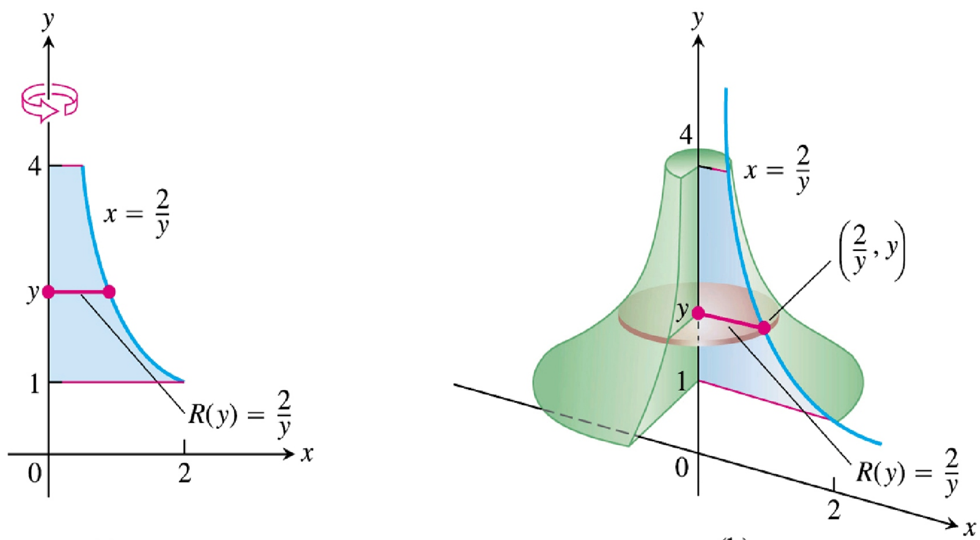
Observación 1.11. *La fórmula para el cálculo de volúmenes de revolución (eje X) se puede generalizar para calcular el volúmen que se genera al revolucionar el área comprendida entre dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ alrededor de la recta $y = K$:*



En este caso, la fórmula para la obtención del volumen será:

(161) $$\textit{Volumen} = \pi \int_a^b \left([g(x) - K]^2 - [f(x) - K]^2 \right) dx$$

2.3.5. Cálculo de volúmenes de revolución (eje Y)..



(a) (b)

Empleando las sumas de Riemann, tal y como lo hacíamos en la subsección correspondinete al cálculo de la longitud de una curva, se puede demostrar que:

(162) $$\Delta V = \pi (R(y))^2 \Delta y.$$

Por lo tanto:

(163) $$\text{Volumen} = \int_a^b \pi (R(y))^2 dy.$$

En el caso particular de la figura (b), el volumen del sólido de revolución viene dado por:

$$V = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^4 = 4\pi \left(\frac{4^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right) = 4\pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 3\pi. \tag{164}$$

2.3.6. Cálculo del valor medio de una función en un intervalo.

Definición 1.5. ***Valor medio de una función en un intervalo.*** *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, se define el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ como:*

$$\overline{f} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}. \tag{165}$$

Ejemplo 1.36. *Calculemos el valor medio de la función $f(\theta) = sen(\theta)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$:*

$$\overline{f} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\theta)d\theta = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} [-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(-\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0)\right) = \frac{2}{\pi}. \tag{166}$$

Ejemplo 1.37. *La temperatura de una barra delgada situada en el intervalo $[-2,2]$ es $T(x) = 4 - x^2$ en C, veamos entonces cual es la temperatura media en la barra:*

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\displaystyle\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx}{2-(-2)} = \frac{1}{4}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{1}{4}(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}) = \frac{1}{4}(16 - \frac{16}{3}) = \frac{1}{4}\frac{32}{3} = \frac{8}{3} \quad \frac{C \cdot m}{m} \\ &= \frac{8}{3} \quad C. \end{aligned} \tag{167}$$

2.4. Las integrales impropias. En esta sección trabajaremos con las integrales impropias y sus principales propiedades.

Definición 1.6. ***Integrales impropias de primera clase o integrales infinitas.*** *Sea a un número fijo y supongamos que existe $\displaystyle\int_a^N f(x)\,dx$ para todo $N \geq a$. Se define la integral impropia:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx. \tag{168}$$

Se dice que la integral impropia converge si este límite existe y es finito (es decir, si es un número), y en caso contrario que diverge. Análogamente, se define:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^a f(x)\,dx. \tag{169}$$

Ejemplo 1.38. *Calculemos las siguientes integrales impropias:*

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$:

(170) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^N = \lim_{N\to+\infty} \left[-\frac{1}{N} + \frac{1}{1}\right] = 1.$$

Esta integral impropia converge y vale 1.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$:

(171) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} [\ln(x)]_1^N = \lim_{N\to+\infty} (\ln(N) - \ln(1)) = +\infty.$$

Esta integral impropia diverge.

Definición 1.7. ***Integrales impropias de segunda clase.*** *Sea* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real que presenta una discontinuidad de salto infinito en algún punto del intervalo. Se define la integral impropia de segunda clase como la integral definida:*

(172) $$\int_a^b f(x)dx.$$

Donde:

- *Si el punto de discontinuidad está el extremo inferior del intervalo:*

(173) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to a^+} \int_N^b f(x)dx.$$

- *Si el punto de discontinuidad está en el extremo superior del intervalo:*

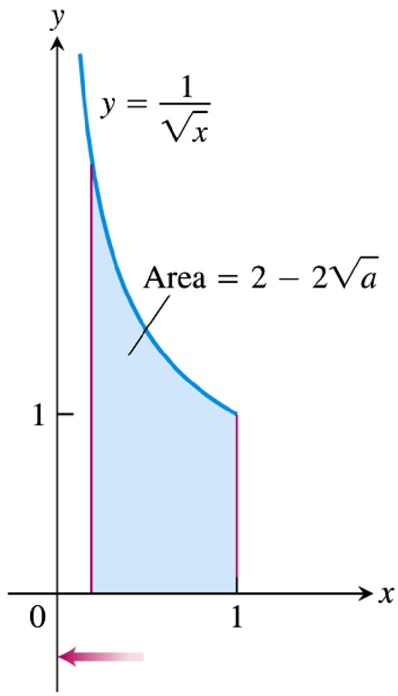
(174) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to b^-} \int_a^N f(x)dx.$$

- *Si el punto de discontinuidad está c está en el interior del intervalo,* $c \in (a,b)$*:*

(175) $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{N\to c^-} \int_a^N f(x)\,dx + \lim_{M\to c^+} \int_M^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.39. *Calculemos las siguientes integrales impropias de segunda especie.*

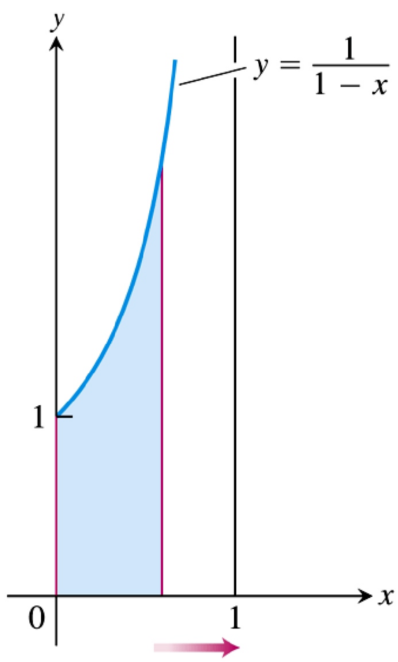
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$:



(176) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{N\to 0^+} \int_N^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

El área bajo la gráfica de la función es finita y vale 2.

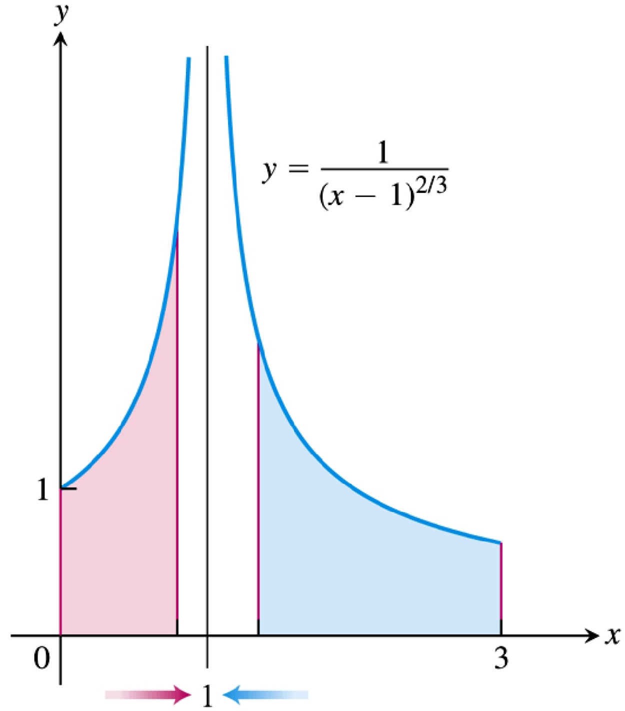
- $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$:



(177) $$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{N\to 1^-} \int_0^N \frac{1}{1-x}\,dx = +\infty$$

La integral diverge. El área bajo la curva no está acotada.

- $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$:



$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx \\
&= \lim_{N\to 1^-}\int_0^N \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \lim_{M\to 1^+}\int_M^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx \\
&= \lim_{N\to 1^-}\left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_0^N + \lim_{M\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_M^3 \qquad (178)\\
&= \lim_{N\to 1^-}\left[\frac{(N-1)^{1/3}}{1/3} - \frac{(-1)^{1/3}}{1/3}\right] + \lim_{M\to 1^+}\left[\frac{(2)^{1/3}}{1/3} - \frac{(M-1)^{1/3}}{1/3}\right] \\
&= \frac{1}{1/3} + 3\sqrt[3]{2} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

3. Métodos numéricos de integración.

En esta sección veremos como aproximar numéricamente el valor de una integral definida

$$\int_a^b f(x)dx. \qquad (179)$$

Dicha aproximación tiene utilidad cuando no se conoce una primitiva de la función f o cuando f sólo se conoce en puntos x_i dados (tabla numérica o resultados experimentales). La idea geneal es utilizar los valores conocidos $f(x_i)$ y aproximar el valor de $\int_a^b f(x)dx$ por una combinación lineal

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i), \qquad (180)$$

donde los coeficientes $A_i^{(n)}$ deberán ser determinados previamente.

Naturalmente se cometerá un error que denotaremos por $R_n(f)$ de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i) + R_n(f). \tag{181}$$

De forma general, una expresión de la forma (180) se dice una **fórmula de cuadratura**. Los puntos x_i, $i = 0, \cdots, n$, distintos, se llaman nodos o puntos de cuadratura y los coeficientes $A_i^{(n)}$ **coeficientes de cuadratura o pesos de la fórmula**.

El problema básico de la integración numérica es la elección de los nodos para que el error $R_n(f)$ sea lo más pequeño posible para una amplia clase de funciones. Una noción particularmente útil para medir el error de una fórmula de cuadratura es el llamado **grado** u **orden de precisión**.

Definición 1.8 (Grado de una fórmula de cuadratura). *Se dice que una fórmula de cuadratura es de orden m si*

$$R_n(x^k) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m, \tag{182}$$

es decir, si todos los polinomios de grado $\leq m$ son integrados exactamente con dicha fórmula.

En esta sección nos centraremos básicamente en las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio-polinómico, es por ello, que comenzaremos con una breve subsección en la introduciremos dicho concepto.

3.1. Interpolación polinómica de Lagrange. Los resultados de la teoría de interpolación son una parte básica de la teoría constructiva de funciones, de los métodos de integración numérica y del tratamiento numérico de ecuaciones diferenciales mediante operadores discretos.

En un sentido amplio, se entiende por interpolación de Lagrange el proceso de encontrar una función que toma valores dados en puntos dados. Si también se especifican valores para alguna de las derivadas de la función se denomina interpolación de Hermite.

Así el planteamiento general de la interpolación de Lagrange supone dados $(n+1)$ puntos distintos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de un intervalo $[a, b]$ y $(n + 1)$ valores cualesquiera $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_n)$. Se supone dado también un conjunto de funciones $L \subset \mathscr{C}[a, b]$ y se trata de encontrar una función $p \in L$ que en los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ tome, respectivamente, los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_n)$:

$$p \in L, \quad p(x_i) = f(x_i),\ i = 1, \cdots, n. \tag{183}$$

Observación 1.12. *No se supone, de momento, que los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ sean equidistantes, ni siquiera que se numeren en su orden de magnitud. También se utiliza la notación $f(x_i)$ por referencia al caso común en que tales valores correspondan a los de una función definida en el intervalo $[a, b]$ que contiene a los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ (llamados **nodos de interpolación**). Esto no es así, en general, de modo que el conjunto de valores $\{(x_i, f(x_i)) : i = 1, \cdots, n\}$ es, en realidad, una tabla:*

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Sea $\mathscr{P}_n$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a n

$$\mathscr{P}_n = \{p : x \in \mathbb{R} \to p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n\}. \tag{184}$$

La **interpolación polinómica de Lagrange** es un caso particular del problema en el que se considera como espacio

L el espacio de polinomios $\mathscr{P}_n$. Se plantea del modo siguiente: dados $(n+1)$ puntos distintos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ y $(n+1)$ valores asociados cualesquiera $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_n)$, encontrar $p_n \in \mathscr{P}_n$ tal que:

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{185}$$

Antes de pasar al caso general, estudiemos el problema para el caso particular de los polinomios de primer grado, $\mathscr{P}_1$.

Ejemplo 1.40 (Interpolación polinómica de Lagrange de primer grado.). *Supongamos entonces que $L \subset \mathscr{C}[a,b]$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1, es decir, el conjunto de las funciones de la forma*

$$p(x) = a_0 + a_1 x, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}. \tag{186}$$

El problema de la interpolación polinómica de Lagrange es equivalente a encontrar los coeficientes $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_0 + a_1 x_i = f(x_i), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{187}$$

y equivale a encontrar la recta $p(x) = a_0 + a_1 x$ que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $\cdots$, $(x_n, f(x_n))$. El problema (187) es equivalente también al sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \tag{188}$$

Analicemos los casos dependiendo del número de nodos de interpolación:

- *Si $n = 0$ (solamente se tiene un nodo de interpolación) entonces*

$$a_0 + a_1 x_0 = f(x_0) \tag{189}$$

  nos da $a_0 = f(x_0) - a_1 x_0$ de modo que todo polinomio $p(x) = a_1(x - x_0) + f(x_0)$, $a_1 \in \mathbb{R}$ es solución. Esto traduce el hecho conocido de que por un punto pasan infinitas rectas.
- *Si $n = 1$ (dos nodos de interpolación) se tiene el sistema:*

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 & = & f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 & = & f(x_1). \end{array} \tag{190}$$

  Como $x_0 \neq x_1$ el sistema tiene solución única (a_0, a_1) que nos da:

$$p(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1), \tag{191}$$

  lo que concuerda con que por dos puntos distintos pasa solamente una recta.
- *Si $n \geq 2$ se tendrá el sistema (188), es decir:*

$$\begin{array}{rcccl} p(x_0) & = & a_0 + a_1 x_0 & = & f(x_0) \\ p(x_1) & = & a_0 + a_1 x_1 & = & f(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p(x_n) & = & a_0 + a_1 x_n & = & f(x_n). \end{array} \tag{192}$$

  Las dos primeras ecuaciones de (192) son las mismas que las de (190) y, por lo tanto, nos determinan p

por la fórmula (191). La verificación de las ecuaciones 2, 3, …, n implica que:

(193) $$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 2, \cdots, n,$$

siendo p la recta (191). Estas condiciones serán satisfechas si y sólo si los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 2, \cdots, n$ están alineados con $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. En caso contrario no existe solución.

Pasemos entonces a estudiar el caso general en el cual estamos interesados en buscar un polinomio p_n de grado n ($p_n \in \mathscr{P}_n$) que cumpla el sistema de ecuaciones

(194) $$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

El polinomio que se busca es de la forma:

(195) $$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

donde los coeficientes a_0, a_1, …, a_n son las incógnitas del siguiente sistema lineal:

(196) $$\begin{array}{rcccl} p_n(x_0) & = & a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ p_n(x_1) & = & a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_n(x_n) & = & a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n & = & f(x_n). \end{array}$$

Se puede demostrar que el sistema lineal anterior tiene una única solución puesto que el determinante de la matriz de coeficientes es no singular.

Es evidente que el cálculo del polinomio p_n puede hacerse resolviendo el sistema lineal (196). Este método no es recomendable puesto que existen procedimientos alternativos más sencillos. Estudiaremos a continuación la fórmula de Lagrange para obtener este polinomio (único) aunque no directamente en la forma $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

3.1.1. Fórmula de Lagrange para el polinomio de interpolación. El resultado de existencia y unicidad del polinomio de interpolación asegura la existencia y unicidad de los polinomios $l_k^{(n)}$, ($k = 0, 1, \ldots, n$) de grado $\leq n$, verificando:

(197) $$l_k^{(n)}(x_i) = \delta_{i,k}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

El polinomio $l_k^{(n)}$ se llama polinomio fundamental de Lagrange de grado n. Como $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, se tiene de manera inmediata:

(198) $$l_k^{(n)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)},$$

que escrbimos en la siguiente forma abreviada:

(199) $$l_k^{(n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Es inmediato entonces que el polinomio p_n de interpolación relativo a los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y a los valores $f(x_0)$,

$f(x_1), \ldots, f(x_n)$ está dado por la siguiente **fórmula de Lagrange**:

(200) $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k^{(n)}(x).$$

3.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio-polinómico. En la sección anterior hemos visto cómo se puede aproximar una función f por un polinomio de interpolación p_n. Lógicamente, al substituir f por p_n se comete un error que será tanto más fácil de controlar cuanto más regular sea la función. La idea para obtener fórmular de cuadratura será reemplazar la integral

(201) $$\int_a^b f(x)dx$$

por

(202) $$\int_a^b p_n(x)dx.$$

Existen dos razones básicas para ello:

- La integración de polinomios es muy simple.
- Ocurre frecuentemente que las funciones que se integran sólo son conocidas experimentalmente en un conjunto de $(n+1)$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Hará falta entonces, fijar el grado del polinomio. Aquí, supondremos que los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son dados, de forma que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Sea $p_n(x)$ el único polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los puntos x_i, es decir:

(203) $$p_n(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad p_n \in \mathscr{P}_n.$$

Como ya hemos dicho, aproximamos la integral $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b p_n(x)dx$. Inmediatemante vemos que $\int_a^b p_n(x)dx$ representa efectivamente una fórmula de cuadratura. En efecto, utilizando la fórmula de Lagrange para $p_n(x)$ se tiene:

(204) $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k^{(n)}(x),$$

donde $l_k^{(n)}(x)$ es el k-ésimo polinomio de Lagrange de grado $\leq n$ tal que $l_k^{(n)}(x_i) = \delta_{i,k}$, $0 \leq i, k \leq n$:

(205) $$l_k^{(n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

En consecuencia

(206) $$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k),$$

donde

(207) $$A_k^{(n)} = \int_a^b l_k^{(n)}(x)dx.$$

Así pues los coeficiente de la fórmula de cuadratura anterior están completamente determinados por los extremos del intervalo de integración y por los puntos de interpolación. Así mismo los coeficientes son independientes del integrando. Cualquier fórmula de cuadratura del tipo anterior se dice de tipo **interpolatorio-polinómico**.

Ejemplo 1.41 (Fórmula del trapecio simple.). *Si $n = 1$, $x_0 = a$ y $x_1 = b$. Se obtiene:*

$$p_1(x) = \frac{(x-b)}{(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)}{(b-a)} f(b), \tag{208}$$

y como

$$\int_a^b \frac{(x-b)}{(a-b)} dx = \int_a^b \frac{(x-a)}{(b-a)} dx = \frac{b-a}{2}, \tag{209}$$

se tendrá la fórmula

$$\int_a^b f(x) \simeq \frac{b-a}{2} \left[f(a) + f(b) \right], \tag{210}$$

conocida como la fórmula del trapecio simple (por aproximar el valor de la integral por el área de un trapecio).

El siguiente teorema nos da una condición equivalente a la definición que permite caracterizar las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio-polinómico y obtener los coeficientes, sin necesidad del cálculo de las integrales de los polinomios de Lagrange.

Teorema 1.8. *Una fórmula de cuadratura $\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i)$ de $(n+1)$ puntos es de tipo interpolatorio-polinómico si y solamente si es al menos de orden n, es decir, si es exacta al menos para polinomios de grado $\leq n$.*

Como corolario del teorema anterior tenemos:

Corolario 1.2. *Para obtener los coeficientes de la fórmula $\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i)$ de tipo interpolatorio-polinómico relativa a los puntos x_0, x_1, …, x_n y al intervalo $[a, b]$ es suficiente resolver el sistema lineal:*

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} x_k^i = \int_a^n x^i dx = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{211}$$

siendo las incógnitas $A_n^{(n)}$, $A_n^{(n)}$, …, $A_n^{(n)}$

Ejemplo 1.42 (Fórmula de Poncelet (o punto medio).). *Consideremos el caso más simple en el que $n = 0$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$. En este caso el sistema lineal se reduce a una única ecuación explícita:*

$$A_0 = b - a. \tag{212}$$

Así, se tiene la fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{213}$$

conocida como la fórmula del punto medio o de Poncelet (donde se aproxima el valor de la integral por el área de un rectángulo).

Ejemplo 1.43 (Fórmula de Simpson.). *Consideremos el caso en el que $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$. En este caso, tendremos que resolver el sistema:*

(214)
$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} A_0 & + & A_1 & + & A_2 & = & b-a \\ aA_0 & + & \frac{a+b}{2}A_1 & + & bA_2 & = & \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2A_0 & + & \frac{(a+b)^2}{4}A_1 & + & b^2A_2 & = & \frac{b^3-a^3}{3} \end{array}\right\},$$

cuya solución es

(215)
$$A_0 = A_2 = \frac{b-a}{6},\ A_1 = \frac{2}{3}(b-a).$$

Así, se tiene la fórmula:

(216)
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right],$$

conocida como la fórmula de Simpson simple.

Observación 1.13. *En la práctica, y cuando el intervalo de integración es grande, suele ser más ventajoso el uso de las conocidas como fórmulas de cuadratura compuestas. La idea fundamental de este tipo de fórmulas consiste en dividir en intervalo grande en varios subintervalos de tamaño más reducido, aplicar en cada uno de ellos una fórmula de cuadratura simple, y sumar las aproximaciones para todos los subintervalos (utilizando las propiedades de linealidad de la integración). De esta manera se tienen, por ejemplo, la fórmula del trapecio compuesta o la fórmula de Simpson compuesta, muy utilizadas en la práctica.*

4. Ejercicios del tema.

Ejercicio 1.1. *Calcula las siguientes integrales:*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$
3. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$
5. $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$
6. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$
7. $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{\log(2x)}{\log(4x)}\frac{dx}{x}$
9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)^3}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$
10. $\displaystyle\int x\log(x)\,dx$
11. $\displaystyle\int \log(x)\,dx$
12. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}x\,dx$
13. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)^2\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$
16. $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx$
18. $\displaystyle\int x^2(3x^3+14)^3\,dx$
19. $\displaystyle\int \sqrt[5]{5x+6}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{17x}{\sqrt[3]{6x^2+8}}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$
22. $\displaystyle\int \sec(x)^2\sqrt{\tan(x)}\,dx$
23. $\displaystyle\int \cos(x)\ \operatorname{sen}(x)^3\,dx$

24. $\displaystyle\int x^2\, 7^{x^3+5}\, dx$ 25. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$ 26. $\displaystyle\int \frac{1}{9\,a^x+4\,a^{-x}}\, dx$

Ejercicio 1.2. *Calcula las siguientes integrales impropias*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-2}$
4. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log(x))^2}\, dx$
5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3+2}\, dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\, 2^{-x^2}\, dx$

Ejercicio 1.3. *Calcular el área de las siguientes regiones:*

1. *La región limitada por las curvas* $y=x^3$ *e* $y=x^2-x$ *en el intervalo* $[0,1]$.
2. *La region limitada por la curva* $y=x^2-4x$ *y el eje* x.
3. *La región limitada por la curva* $y=\operatorname{sen}(x)$ *y el eje* x *en* $[0,2\pi]$.
4. *La región limitada por* $y=3x$ *e* $y=x^3+2x^2$.

Ejercicio 1.4. *Calcula las siguientes longitudes de arco:*

1. *La longitud del arco de curva de la gráfica de la función* $f(x)=2x\sqrt{x}$ *cuando* x *recorre el intervalo* $[0,1]$.
2. *La longitud del arco de curva de la gráfica de la función* $f(x)=1+6x^{\frac{3}{2}}$ *cuando* x *recorre el intervalo* $[0,1]$.
3. *La longitud del arco de curva de la gráfica de la función* $f(x)=(1+x)^{\frac{3}{2}}$ *cuando* x *recorre el intervalo* $[0,1]$.

Ejercicio 1.5. *Calcula los siguientes volúmenes de revolución:*

1. *El volumen del sólido* S *que se forma al girar alrededor del eje* OX *la región bajo la curva* $y=x^2+1$ *en el intervalo* $[0,2]$.
2. *El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje* OX *el recinto comprendido entre la parábola* $y=x^2$ *y la recta* $y=x$.
3. *El volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje* OX *el recinto limitado por la curva* $y=(1+x^2)^{-1/2}$ *y las rectas* $y=0$ *y* $x=1$.
4. *El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje* OX *la región limitada por la la parábola* $y=2x-x^2$ *y la recta* $y=-x+2$.

Ejercicio 1.6. *Calcula las siguientes superficies laterales:*

1. *El area lateral que se genera al revolucionar alrededor del eje* OX *la gráfica de la función* $y=1+6x$ *cuando* x *recorre el intervalo* $[0,1]$.
2. *El área de la superficie de una esfera de radio* r.
3. *El área lateral de un cono circular recto cuya base tiene radio* r *y cuya altura es* h.
4. *El área lateral de un cilindro de radio* r.

Ejercicio 1.7. *Calcula:*

1. *La derivada de las siguientes funciones:*

   a) $\displaystyle G(x)=\int_{\cos(x)}^{x^3}\tan(t)\, dt.$ *b)* $\displaystyle G(x)=\int_{e^x}^{4}\log(t)\, dt.$ *c)* $\displaystyle G(x)=\int_1^4 \frac{t}{1+t}\, dt.$

2. *Los máximos y mínimos de las siguientes funciones:*

   a) $\displaystyle G(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt.$ *b)* $\displaystyle G(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)dt.$