

Cálculo I

Bloque II: Derivación e integración.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2019-20

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
 - Definición y operaciones
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Rectas tangentes y velocidades

La ecuación de una recta en el plano que pasa por el punto (a, b) y tiene pendiente m es $y = b + m(x - a)$.

Límite del cociente incremental

- Sea $f(x)$ una función continua en a . Si existe el límite

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

entonces la **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por este punto y cuya pendiente es m :

$$y = f(a) + m(x - a)$$

- Sea $s = f(t)$ el desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta respecto al origen en el tiempo t . En el intervalo desde $t = a$ a $t = a + h$ tenemos

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Derivada de una función en un punto

Definición

La **derivada de la función $f(x)$ en el punto a** , denotada $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe.

La derivada por la derecha, $f'_+(a)$, y por la izquierda, $f'_-(a)$, se definen análogamente utilizando, respectivamente, el límite por la derecha y por la izquierda.

Notaciones

$f'(x)$ prima de x , $\frac{dy}{dx}$ derivada de y con respecto a x , y' y prima, y $\frac{d}{dx}(f(x))$ derivada con respecto a x de f de x .

El valor de la derivada en el punto a : $f'(a)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$, $y'(a)$ y $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=a}$.

Ecuación de la recta tangente

Cartagena99

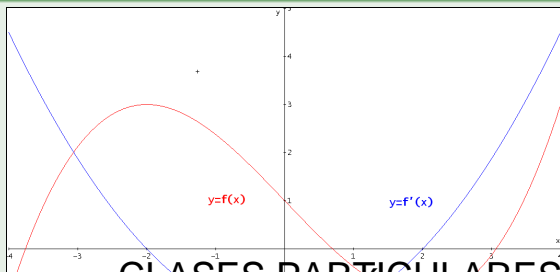
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Función derivada

Definición

La **función derivada** de $f(x)$, denotada $f'(x)$, es la función que tiene por dominio $\text{dom}(f') = \{x \in \text{dom}(f) : f'(x) \text{ existe}\}$ y que a cada x le hace corresponder $f'(x)$.

$$y = f(x) \text{ e } y = f'(x)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Función diferenciable y derivadas de orden superior.

Definición

La función $f(x)$ es **diferenciable en a** si $f'(a)$ existe, y es **diferenciable en un intervalo abierto** (a, b) (donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser ∞) si es diferenciable en todo punto del intervalo.

f es **diferenciable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , tiene derivada por la derecha en a y derivada por la izquierda en b .

Teorema

Si $f(x)$ es diferenciable en a entonces es continua en a .

Definición (Segunda derivada y derivadas de orden superior.)

La segunda derivada de la función $f(x)$ es la derivada de la función derivada $f'(x)$ y

se denota: $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'' , $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Linealización de una función en un punto.

Definición

La linealización de la función $f(x)$ en el punto a es la función polinómica de primer grado:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linealización de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 1$: $L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$

x	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$
0.9	0.9654893846	0.9666666666
0.99	0.9966554934	0.9966666666
0.999	0.9996665554	0.9996666666
0.9999	0.9999666655	0.9999666655
1.0001	1.000033332	1.000033333
1.001	1.000333222	1.000333333

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Derivación mediante tablas.

Teorema

Las siguientes funciones son diferenciables:

- 1 *Funciones polinómicas y racionales.*
- 2 *Funciones potenciales en $(0, \infty)$.*
- 3 *Las funciones raíz salvo en el 0.*
- 4 *Funciones trigonométricas.*
- 5 *Función arcotangente. Las funciones arcoseno y arcocoseno salvo en -1 y 1 .*
- 6 *Funciones exponenciales y logarítmicas.*
- 7 *La función valor absoluto salvo en el 0.*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Derivación y operaciones.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables en el punto a . Entonces también son diferenciables en a las funciones $(f + g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y, si $g(a) \neq 0$, $(f/g)(x)$. Además:

- ① $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- ② $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- ③ $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Teorema

Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto a y la función $g(x)$ es diferenciable en el punto a , entonces la función $(f \circ g)(x)$ es diferenciable en el punto $f(a)$.

Cartagena99

CLASAS O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
 - Aplicaciones de la Regla de la cadena.
 - Teorema del valor medio y aplicaciones
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones de la Regla de la cadena.

Derivación implícita

Una función se dice que está definida explícitamente cuando podemos escribir las imágenes de los elementos x del dominio de la forma $y = f(x)$.

En ocasiones una función queda definida a través de una relación entre las variables x e y , $F(x, y) = 0$, en este caso se dice que la función está **definida implícitamente**.

Con ayuda de la regla de la cadena se puede encontrar la derivada de la función mediante **derivación implícita** que consiste en considerar y como función de x , $y(x)$, y despejar $y'(x)$ en la expresión:

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$$

Análogamente se puede utilizar la derivación implícita para obtener derivadas de orden superior de la función, por ejemplo la segunda derivada despejando $y''(x)$ a partir de:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones de la Regla de la cadena.

Teorema

Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto (a, b) . Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ o $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es uno a uno.

Teorema (Derivada de la función inversa)

Sea f una función diferenciable en el intervalo I y tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si f tiene una inversa, f^{-1} , en I entonces f^{-1} es diferenciable y su derivada verifica:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones de la Regla de la cadena.

Derivación logarítmica

La derivación de algunas funciones complicadas, $y = f(x)$, que incluyen productos, cocientes y potencias se puede simplificar utilizando la **derivación logarítmica**:

- 1 Se toman logaritmos en $y = f(x)$, $\ln y = \ln f(x)$, y se simplifica todo lo posible el segundo miembro.
- 2 Se deriva implícitamente la versión simplificada de $\ln y = \ln f(x)$:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln f(x)).$$
- 3 Y como $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ se tiene que $\frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx}(\ln f(x))$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones de la Regla de la cadena.

Razones de cambio relacionadas

La derivación implícita se utiliza también para encontrar razones (tasas o velocidades) de cambio de variables relacionadas que están cambiando en el tiempo.

- 1 Dentro del problema encontrar las cantidades que cambian en el tiempo y asignarles una variable (dependiente del tiempo, e.d., una función).
- 2 Relacionar las variables implicadas en el problema mediante una o más ecuaciones.
- 3 Derivar implícitamente con respecto al tiempo en las ecuaciones anteriores para obtener relaciones entre las razones de cambio de las variables (derivadas de la funciones).

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
 - Aplicaciones de la Regla de la cadena.
 - Teorema del valor medio y aplicaciones
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Teorema del valor medio.

Teorema (Teorema de Rolle)

Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) con $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (Teorema del valor medio)

Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Signo de f' y crecimiento de f .

Definición

La función $f(x)$ es **creciente** (decreciente) **en el intervalo** I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Teorema

Sea f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) .

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es constante en $[a, b]$.

Corolario

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Extremos locales y puntos críticos

Definición

- 1 Se dice que la función $f(x)$ tiene un **máximo local o relativo** en c si está definida y verifica que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c .
- 2 Se dice que la función $f(x)$ tiene un **mínimo local o relativo** en c si está definida y verifica que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c .

Los máximos y mínimos locales se denominan extremos locales.

Teorema

Si la función $f(x)$ tiene un extremo local en c , entonces o $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Definición

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Extremos locales

Teorema (Criterio de la 1ª derivada)

Supongamos que c es un punto crítico de la función $f(x)$ y que ésta es continua en c .

- 1 Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$ entonces en c se alcanza un máximo local.
- 2 Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$ entonces en c se alcanza un mínimo local.
- 3 Si existe $\delta > 0$ tal que el signo de $f'(x)$ se mantiene para $0 < |x - c| < \delta$ entonces en c no se alcanza un extremo local.

Teorema (Criterio de la 2ª derivada)

Supongamos que la función $f(x)$ verifica que $f'(c) = 0$ y que $f''(c)$ existe.

- 1 Si $f''(c) < 0$ entonces en c se alcanza un máximo local.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Extremos absolutos

Cálculo de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado

Los valores extremos de una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ existen y sólo se pueden alcanzar en sus puntos críticos o en los extremos del intervalo. Procedimiento para encontrarlos:

- 1 Encuentra los puntos críticos c_1, c_2, \dots, c_n de f en el intervalo abierto (a, b) .
- 2 El máximo y el mínimo de los valores $f(a), f(c_1), \dots, f(c_n)$ y $f(b)$ son respectivamente el máximo y el mínimo absolutos de f en $[a, b]$.

Cálculo de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo abierto

Supongamos que f es continua en el intervalo abierto (a, b) donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$.

Los extremos absolutos no tienen por qué existir pero si existen se alcanzarán en puntos críticos. Procedimiento para encontrarlos:

- 1 Calcula, si existen, $f(a_+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $f(b_-) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
- 2 Encuentra los puntos críticos c_1, c_2, \dots, c_n en el intervalo abierto (a, b) .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Método de Newton.

Ecuación $f(x) = 0$ con f función derivable.

Algoritmo del Método de Newton:

- 1 Primera aproximación: x_0
- 2 Conocida la aproximación x_n definimos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

- Si la sucesión $\{x_n\}$ converge lo hace hacia una raíz de la ecuación y se pueden aceptar como exactas las cifras decimales que se repiten de un paso al siguiente.
- Si la sucesión $\{x_n\}$ no converge o lo hace hacia una raíz no buscada se debe reiniciar el algoritmo con una mejor primera aproximación x_0 .

Ecuación $\cos x = x$

$\cos x - x = 0$ luego $f(x) = \cos x - x$, y así

$$g(x) = x - \frac{\cos x - x}{-1}$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Regla de L'Hôpital.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en un intervalo abierto que contiene a a , salvo quizá en el propio a , y tal que $g'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo excepto posiblemente en a .

Si se verifica una de las dos condiciones siguientes (indeterminaciones de cociente):

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tanto si el límite del cociente es un número real como si es $\pm\infty$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
 - Integral indefinida.
 - Integral definida.
 - Teorema fundamental del Cálculo.
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Primitivas de una función.

Definición

Se dice que una función F es una **primitiva** (o antiderivada) de una función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Teorema (Las primitivas de una función difieren en una constante)

$F'(x) = G'(x)$ para todo $x \in [a, b]$ si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que
 $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

Notación de la integral indefinida.

Si $F'(x) = f(x)$ en un intervalo I todas las primitivas de f se representan por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde \int es el símbolo integral. El símbolo integral se denota por \int .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Primitivas de una función.

La derivación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas.

$\frac{d}{dx}(\)$ denota la derivación de () respecto a x

$\int (\)dx$ denota la integración de () respecto a x .

Si $\int f(x)dx = F(x) + C$ entonces F es una primitiva de f , es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

- Una primitiva de la derivada de una función es esa función más una constante:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

- La derivada de una primitiva de una función es esa función:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x)$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Propiedades de la integral indefinida.

Teorema (La integración es lineal.)

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

$$\textcircled{1} \int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

$$\textcircled{2} \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$$

Regla de integración por partes.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables se tiene que:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Teorema (Regla de sustitución.)

Si $u = a(x)$ es una función diferenciable en un intervalo I que contiene a x_0 entonces

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
 - Integral indefinida.
 - Integral definida.
 - Teorema fundamental del Cálculo.
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Problema del área.

Área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ en $[a, b]$

Suponemos f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$, $x_k = a + k\Delta x$ (**partición regular** del intervalo $[a, b]$).
- Se elige un **punto de muestra** x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Así $f(x_k^*)\Delta x$ representa el área de un rectángulo de base el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(x_k^*)$.
- Se aproxima el área A mediante la suma de las áreas de los n rectángulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

Definición

Sea f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. El área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ se define como

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integral definida: Sumas de Riemann.

Sumas de Riemann de una función $y = f(x)$ en $[a, b]$

Suponemos f función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$.

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitudes $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Esta colección de números se denomina **partición** del intervalo $[a, b]$ y se denota por P .

- Sea $\|P\|$ la mayor de las longitudes Δx_k de los intervalos que se denomina **norma** de la partición P .
- Se elige un **punto de muestra** x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.
- Se forma la suma:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = f(x_1^*) \Delta x_1 + f(x_2^*) \Delta x_2 + \dots + f(x_n^*) \Delta x_n$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Integral definida: definición.

Definición (Integral definida)

Sea f función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **integral definida** de f en $[a, b]$ se define, si el límite existe, como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

En este caso se dice que f es **integrable** en $[a, b]$. Los números a y b se denominan, respectivamente, **límite inferior** y **límite superior** de la integral y la función f es el **integrando**.

Teorema (Condiciones suficientes de integrabilidad)

- Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f es acotada en $[a, b]$ y sólo tiene un número finito de discontinuidades entonces f es integrable en $[a, b]$.

Corolario

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la integral definida.

Definición (Límites de integración)

- Si a está en el dominio de f entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Si f es integrable en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Teorema (Linealidad)

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$.

- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Teorema (Propiedad aditiva del intervalo)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la integral definida.

Teorema (Integral definida de una constante)

Para cualquier constante k

$$\int_a^b k dx = k(b - a).$$

Teorema (Propiedades de comparación)

Sea f una función integrable en $[a, b]$.

- Si $m \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx$.
- Si $f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
 - Integral indefinida.
 - Integral definida.
 - Teorema fundamental del Cálculo.
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Teorema fundamental del Cálculo.

Teorema (Teorema fundamental del Cálculo)

Sea f una función continua en $[a, b]$. La función g definida para todo $x \in [a, b]$ como:

$$g(x) = \int_a^x f(s) ds.$$

es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g'(x) = f(x)$, es decir, g es una primitiva de f .

Corolario

Sean α y β continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , y f continua en un intervalo que contiene a $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ para cada $x \in [a, b]$ entonces:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s) ds \right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Corolario (Teorema de evaluación)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Propiedades de la integral definida.

Regla de sustitución

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua en el intervalo $[a, b]$ y sea f una función continua en el rango de g , entonces si $F(u)$ es una primitiva de $f(u)$ se tiene que:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Regla de integración por partes.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $[a, b]$ con f' y g' continuas en $[a, b]$ se tiene que

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Índice

- 1 TEMA 4: Funciones derivables
- 2 TEMA 5: Aplicaciones de la derivación.
- 3 TEMA 6: Integración
- 4 TEMA 7: Aplicaciones de la integración.
 - Aplicaciones de la integración

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones de la integración: Áreas y volúmenes.

Definición (Área entre dos curvas)

El área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones integrables en $[a, b]$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Definición (Volumen de un sólido a partir del área de sus secciones transversales.)

Sea S el sólido que se encuentra entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x , que pasa por x y es perpendicular al eje x , es $A(x)$, con $A(x)$ función integrable en $[a, b]$,

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Aplicaciones de la integración: Longitud de un arco de curva.

Definición (Longitud de un arco de curva)

Sea la curva $y = f(x)$, donde f es una función con derivada continua en $[a, b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Si la curva está definida paramétricamente como $x = f(t)$, $y = g(t)$ para $t \in [a, b]$, con f y g funciones con derivada continua en $[a, b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$ es:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aplicaciones de la integración: Valor medio de una función.

Definición (Valor medio de una función en un intervalo)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ se define el valor medio de f en $[a, b]$ como:

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema (Teorema del Valor Medio para integrales)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70