POLITÉCNICA

CONTROL MEDIANTE MODELOS EN VARIABLES DE ESTADO

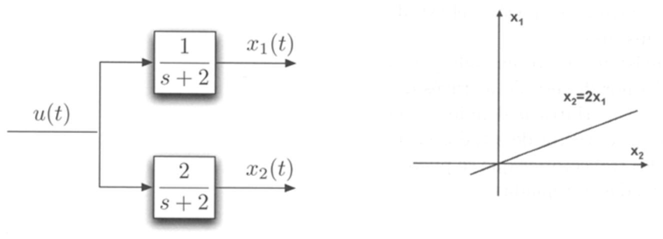
CONTROLABILIDAD

POLITÉCNICA

INTRODUCCIÓN

- Influencia de la entrada en el valor del estado.
- Objetivo: dada una trayectoria en el espacio de estado, plantearse si existe una entrada capaz de generarla.
- Abordar si existe algún motivo por el que algunos estados no puedan alcanzarse mediante la acción de las entradas.
- El estudio de la controlabilidad de un sistema determina qué puntos del espacio de estado son alcanzables actuando sobre las entradas del mismo.
- Situaciones:
  - Dado un sistema, un estado inicial y un estado final, se desea determinar la existencia de una entrada que lleve al sistema entre ambos estados en un tiempo finito.
  - Si un sistema no es controlable (no todos los puntos del espacio de estado son alcanzables por la acción de las entradas), determinar qué puntos son alcanzables partiendo de un estado inicial dado.

CONTROLABILIDAD



Sistema no controlable

CONTROLABILIDAD DEFINICIONES

- Def.1:
  - Se dice que un punto del espacio de estado de un sistema x_1, es controlable desde el estado x_0 en $[t_0,t_1]$ si existe una entrada **u** definida en el anterior intervalo, tal que transfiera el estado del sistema desde x_0 en t_0 a x_1 en t_1.
- Def. 2:
  - Se dice que un punto x_1 del espacio de estado de un sistema es controlable desde x_0 si y sólo si para todo t_0 existe un t_1 finito, tal que x_1 es controlable desde x_0 en $[t_0,t_1]$.

CONTROLABILIDAD DEFINICIONES

- Def. 3:
  - Se dice que un punto x_1 del espacio de estado de un sistema es controlable en $[t_0,t_1]$ si y sólo si para todo x_0, x_1 es controlable desde x_0 en $[t_0,t_1]$.
- Def. 4:
  - Se dice que un punto x_1 del espacio de estado de un sistema es controlable si, para todo estado inicial, x_0, y para todo t_0, existe un t_1 finito, tal que x_1 es controlable desde x_0 en $[t_0,t_1]$.
- Def. 5:
  - Un sistema se dice controlable si todos los puntos de su espacio de estado son controlables.

CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

Partiendo de la solución de la ecuación de estado, si fijamos $x(t_1)$ y $x(t_0)$, el problema consiste en saber si existe u(t) que cumpla esta ecuación:

$$x(t_1)=\phi(t_1,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Prescindiendo de la evolución libre debido a condiciones iniciales no nulas que no depende de la entrada, la controlabilidad dependerá exclusivamente del término:

$$\hat{x}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Por lo que la controlabilidad está en función de:

$$\phi(t,t_0) \text{ y } B(t) \quad \Rightarrow \quad A(t) \text{ y } B(t)$$

CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

Un sistema con una ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

es controlable en $[t_0,t_1]$ si y sólo si su gramiano de controlabilidad, $W(t_1,t_0)$, definido como:

$$W(t_1,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,\tau)B(\tau)B^t(\tau)\phi^t(t_1,\tau)u(\tau)d\tau$$

es no singular.

CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES

El sistema de dimensión **n** con ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad Q, definida por:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

es de rango máximo, es decir, **n**.

EJEMPLO

Dado el sistema:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\4&0&3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\0&5\end{bmatrix}u(t)$$

La matriz de controlabilidad:

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&2&0&4&0\\0&2&0&17&12&62\\0&5&4&15&20&45\end{bmatrix} \qquad rango(Q)=3$$

Sistema controlable

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&0&12\\0&4&20\end{bmatrix} \quad rango(Q_1)=3 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema controlable con } u_1$$

$$Q_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&17&62\\5&15&45\end{bmatrix} \quad rango(Q_2)=2 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema no controlable con } u_2$$

BASE DEL SUBESPACIO CONTROLABLE

- Los vectores columna de Q generan el espacio controlable.
- Luego una posible base se puede obtener eligiendo r_Q vectores columna linealmente independientes. Siendo r_Q el rango de Q.
- Esta particularidad resulta muy útil a la hora de obtener el subsistema controlable de un sistema de partida que globalmente no es controlable.

POLITÉCNICA

SEPARACIÓN DEL SUBSISTEMA CONTROLABLE

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = T\hat{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_a(t) \\ \dot{\hat{x}}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{aa} & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_a(t) \\ \hat{x}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$\hat{x}_a, \hat{A}_{aa}, \hat{B}_a$ Subsistema controlable de dimensión r_Q (rango(Q))

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_{aa}\hat{x}_a(t) + \hat{B}_a u(t)$$

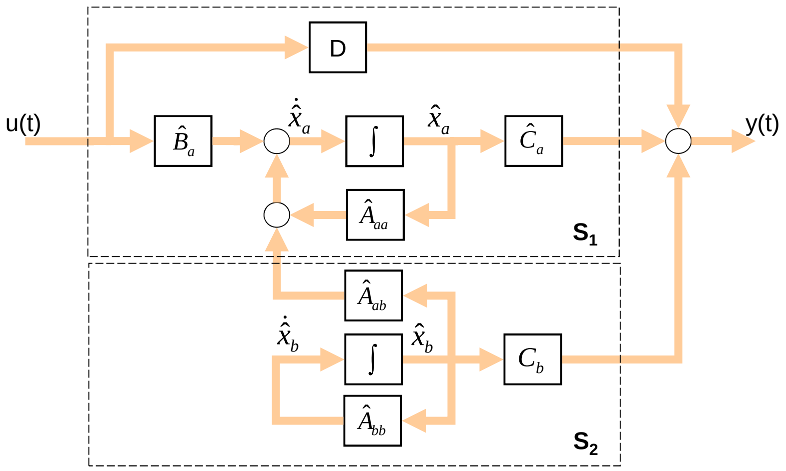
$T = [T_a \quad T_b]$

T_a Base del subespacio controlable (r_Q columnas de Q l.i.)

T_b $n - r_Q$ vectores que junto con T_a sean l.i. entre sí

POLITÉCNICA

SEPARACIÓN DEL SUBSISTEMA CONTROLABLE II



POLITÉCNICA

EJEMPLO

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$Q=\begin{bmatrix}3 & 7 & 15\\ -1 & -5 & -13\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\quad rango(Q)=2<3$$

Sistema no controlable

Base del subespacio controlable:

$$T_a=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -1 & -5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}3 & 7 & 1\\ -1 & -5 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Sistema controlable:

$\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2$

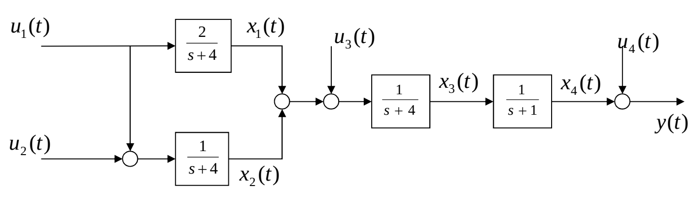
$$\hat{A}_{aa}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_a=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

EJERCICIO

Elegir un mínimo número de entradas que hagan al sistema controlable:



SOLUCIÓN

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & -128 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & -4 & 0 & 16 & 16 & 0 & -64 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -4 & -24 & -8 & 16 & 144 & 48 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & -10 & -54 & -18 & 42 \end{bmatrix}$$

$rango(Q) = 4$

Sistema controlable

La última columna de B son todos ceros por lo que la entrada u_4 no influye en la controlabilidad. Luego el sistema es controlable con u_1, u_2 y u_3

SOLUCIÓN

Con $u_1(t)$ $Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 32 & -128 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & 3 & -24 & 144 \\ 0 & 0 & 5 & -54 \end{bmatrix}$ $rango(Q_1) = 3$ Sistema no controlable

Con $u_2(t)$ $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & 1 & -8 & 48 \\ 0 & 0 & 2 & -18 \end{bmatrix}$ $rango(Q_2) = 3$ Sistema no controlable

Con $u_3(t)$ $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & 2 & -10 & 42 \end{bmatrix}$ $rango(Q_3) = 2$ Sistema no controlable

SOLUCIÓN

Con $u_1(t)$ y $u_2(t)$ $\quad Q_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 0 & 32 & 0 & -128 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -4 & 16 & 16 & -64 & -64 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -24 & -8 & 144 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -54 & -18 \end{bmatrix}$ $\quad rango(Q_{12}) = 4$ Sistema controlable

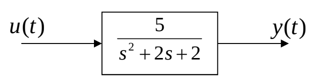
CONTROL MEDIANTE MODELOS EN VARIABLES DE ESTADO

OBSERVABILIDAD

INTRODUCCIÓN

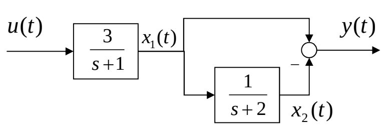
- Objetivo: conocer el estado de un sistema a partir de la evolución de la entrada y de la salida que ésta genera.
- Es una idea complementaria a la controlabilidad.
- El motivo principal se debe a que en muchos casos no nos resultará posible acceder a la medida de las variables de estado:
  - No siempre corresponderán con magnitudes físicas medibles.
  - No siempre, aún siendo propiedades físicas medibles, se tendrá acceso para colocar los sensores o instrumentos imprescindibles.

INTRODUCCIÓN II



Variables de estado: $y(t)$ e $\dot{y}(t)$

El sistema es observable



$$\frac{3}{s+1}\left(1-\frac{1}{s+2}\right)=\frac{3}{s+1}\frac{s+1}{s+2}=\frac{3}{s+2}$$

Se comporta como un primer orden y no es observable. Se impide la observabilidad al existir una calcelación de polo-cero.

POLITÉCNICA

OBSERVABILIDAD DEFINICIONES

- Def. 1:
  - Se dice que un punto x_0 del espacio de estado es observable en $[t_0,t_1]$ si, siendo éste el estado inicial en el instante t_0, $x_0=x(t_0)$, el conocimiento de la entrada u(t) en el intervalo $[t_0,t_1]$ y de la salida y(t) en el mismo intervalo permite determinar que el estado inicial del sistema en el instante t_0 es x_0.
- Def. 2:
  - Se dice que un punto del espacio de estado, x_0, es observable si, siendo éste el estado inicial para un instante inicial t_0 cualquiera, existe un intervalo de tiempo finito $[t_0,t_1]$, tal que el conocimiento de la entrada u(t) en el intervalo $[t_0,t_1]$ y de la salida y(t) en dicho intervalo permite determinar que el estado inicial es x_0.

POLITÉCNICA

OBSERVABILIDAD DEFINICIONES

- Def. 3:
  - Un sistema es observable en $[t_0,t_1]$ cuando todos los puntos del espacio de estado son observables en $[t_0,t_1]$.
- Def. 4:
  - Un sistema es observable si todos los puntos del espacio de estado son observables.

OBSERVABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

Un sistema definido por las ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

es observable en $[t_0,t_1]$ si y sólo si la matriz $V(t_1,t_0)$ conocida como gramiano de observabilidad y definida como:

$$V(t_1,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \phi^t(\tau,t_0)C^t(\tau)C(\tau)\phi(\tau,t_0)u(\tau)d\tau$$

es no singular.

OBSERVABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES

Dado un sistema de orden **n** definido por las ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

es observable si y sólo si la matriz de observabilidad P, definida por:

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango máximo, es decir, **n**.

EJEMPLO

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}x(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

$$P=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 6 & 0 & 4\\ 0 & 5 & 6\\ 18 & 8 & 24\\ 0 & 17 & 18\end{bmatrix} \quad rango(P)=3 \;\Rightarrow\; \text{Sistema observable}$$

$$\text{Con sólo } y_1(t) \quad C(t)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix} \;\Rightarrow\; P_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 4\\ 18 & 8 & 24\end{bmatrix} \quad rango(P_1)=3 \;\Rightarrow\; \text{Observable}$$

$$\text{Con sólo } y_2(t) \quad C(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix} \;\Rightarrow\; P_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 17 & 18\end{bmatrix} \quad rango(P_2)=2 \;\Rightarrow\; \text{No Observable}$$

SUBESPACIO NO OBSERVABLE

Dado un sistema lineal invariante de orden **n** definido por las ecuaciones:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

El conjunto de puntos del espacio de estado tales que tomados como estado incial ante entrada nula, la salida del sistema es permanentemente nula y denominados no-observables, forman un subespacio vectorial que se denomina subespacio no-observable.

Base del subespacio no observable:

n-r_P vectores l.i. ortogonales a las filas de la matriz P

Siendo r_P el rango de la matriz P

EJEMPLO

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}3&0&2\\0&1&0\\0&2&3\end{bmatrix}x(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}0&1&2\end{bmatrix}x(t)+Du(t)$$

$$P=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&5&6\\0&17&18\end{bmatrix}\quad rango(P)=2<3\;\Rightarrow\;\text{No es Observable}$$

P_r matriz formada por las r_P filas l.i. de P: $P_r=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&5&6\end{bmatrix}$

Dimensión del subespacio no observable: $n-r_P=1$

Base del subespacio no observable: $P_r x=0$

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\0&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{cases}v_2=v_3=0\\v_1\text{ cualquier valor}\end{cases}\quad x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

SEPARACIÓN DEL SUBSISTEMA OBSERVABLE

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

$$x(t)=T\hat{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_a(t)\\\dot{\hat{x}}_b(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{aa}&\hat{A}_{ab}\\0&\hat{A}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_a(t)\\\hat{x}_b(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_a\\\hat{B}_b\end{bmatrix}u(t)\qquad \hat{x}_a,\hat{A}_{aa},\hat{C}_a$$

Subsistema observable de dimensión r_P (rango(P))

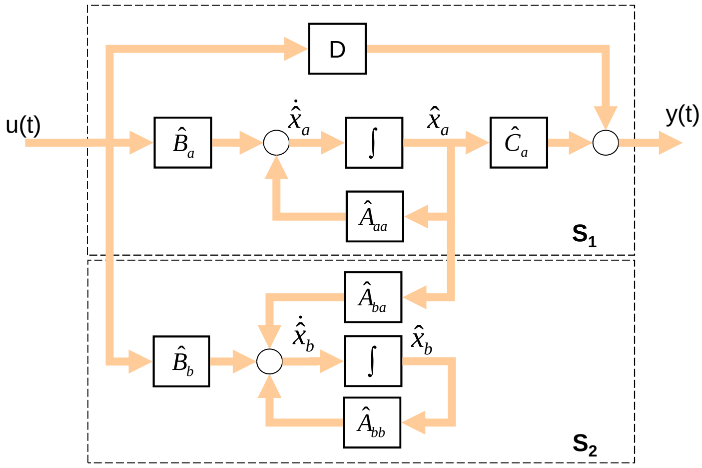
$$y(t)=\begin{bmatrix}\hat{C}_a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_a\\\hat{x}_b\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}_a(t)=\hat{A}_{aa}\hat{x}_a(t)+\hat{B}_a u(t)$$
$$y(t)=\hat{C}_a\hat{x}_a(t)$$

$$T=\begin{bmatrix}T_a&T_b\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{ll}T_b&\text{Base del subespacio no-observable}\\T_a&r_P\text{ vectores que junto con }T_b\text{ sean l.i. entre sí}\end{array}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}v_a\\v_b\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{ll}v_a&r_P\text{ filas l.i. de P}\\v_b&n-r_P\text{ filas que junto con }v_a\text{ sean l.i.}\end{array}$$

SEPARACIÓN DEL SUBSISTEMA OBSERVABLE II



EJEMPLO

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&-3&5\end{bmatrix}x(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}4&-2&2\end{bmatrix}x(t)$$

$$P=\begin{bmatrix}4&-2&2\\10&-8&10\\40&-38&50\end{bmatrix}\quad rango(P)=2<3\ \Rightarrow\ \text{No es Observable}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}4&-2&2\\10&-8&10\\0&0&1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&1&0\\-5&6&0\\-0.5&0.5&1\end{bmatrix}$$

$$\hat{C}=CT=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$$

Subsistema observable: $\hat{x}_1\quad \hat{x}_2\quad \hat{A}_{aa}=\begin{bmatrix}0&1\\-5&6\end{bmatrix}\quad \hat{C}_a=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$

EJERCICIO

Dado el sistema definido por el modelo en variables de estado siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Determinar:

1. La observabilidad del sistema.
2. La base del subespacio no-observable, si existe.

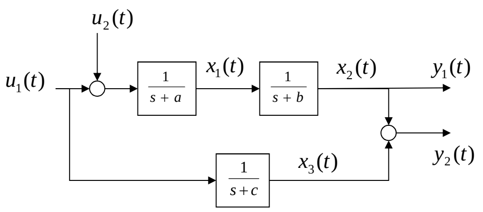
SOLUCIÓN

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad rango(P) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema No Observable}$$

Dimensión del subespacio no observable: 3-2=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO



1. Calcular para a=1, b=2, c=3 $y_1(t)$ e $y_2(t)$, siendo $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=1$ y $u_1(t)=u_2(t)=0$ el estado.
2. a, b y c para que cualquier estado pueda ser observado:
   a. Leyendo sólo la salida $y_1(t)$.
   b. Leyendo ambas salidas.
3. Con $u_1(t)$ y $u_2(t)$, a, b, y c para que pueda alcanzarse el estado $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$ a partir de condiciones iniciales nulas.
4. Utilizando sólo $u_1(t)$ a, b y c para que puedan alcanzarse los siguientes estados a partir de condiciones nulas:
   1. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$
   2. $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$

SEPARACIÓN DE LOS SUBSISTEMAS CONTROLABLE Y OBSERVABLE

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)+Du(t)\end{aligned} \qquad x(t)=T\hat{x}(t) \qquad \begin{aligned}\hat{A} &= T^{-1}AT\\ \hat{B} &= T^{-1}B\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\hat{C} &= CT\\ \hat{D} &= D\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_a(t)\\ \dot{\hat{x}}_b(t)\\ \dot{\hat{x}}_c(t)\\ \dot{\hat{x}}_d(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{aa} & 0 & \hat{A}_{ac} & 0\\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_{bb} & \hat{A}_{bc} & \hat{A}_{bd}\\ 0 & 0 & \hat{A}_{cc} & 0\\ 0 & 0 & \hat{A}_{dc} & \hat{A}_{dd}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_a(t)\\ \hat{x}_b(t)\\ \hat{x}_c(t)\\ \hat{x}_d(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_a\\ \hat{B}_b\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}\hat{C}_a & 0 & \hat{C}_c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_a(t)\\ \hat{x}_b(t)\\ \hat{x}_c(t)\\ \hat{x}_d(t)\end{bmatrix}+Du(t)$$

Subsistema controlable y observable

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_a & \hat{A}_{aa} & \hat{B}_a & \hat{C}_a\end{bmatrix}$$

Subsistema controlable:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_a,\hat{x}_b & \begin{bmatrix}\hat{A}_{aa} & 0\\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_{bb}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\hat{B}_a\\ \hat{B}_b\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\hat{C}_a & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Subsistema observable:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_a,\hat{x}_c & \begin{bmatrix}\hat{A}_{aa} & \hat{A}_{ac}\\ 0 & \hat{A}_{cc}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\hat{B}_a\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\hat{C}_a & \hat{C}_c\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}T_a & T_b & T_c & T_d\end{bmatrix}$$

T_a y T_b vectores columna base del subespacio controlable

T_b y T_d vectores columna base del subespacio no-observable

T_c conjunto de vectores columna que con T_a, T_b y T_d forman una base del espacio total

SEPARACIÓN DE LOS SUBSISTEMAS CONTROLABLE Y OBSERVABLE II

$$T = [T_a \quad T_b \quad T_c \quad T_d]$$

Nº vectores columna de T_a = dimensión del subespacio controlable y observable

Nº vectores columna de $[T_a\ T_b]$ = dimensión del subespacio controlable (r_Q)

Nº vectores columna de $[T_a\ T_c]$ = dimensión del subespacio observable (r_P)

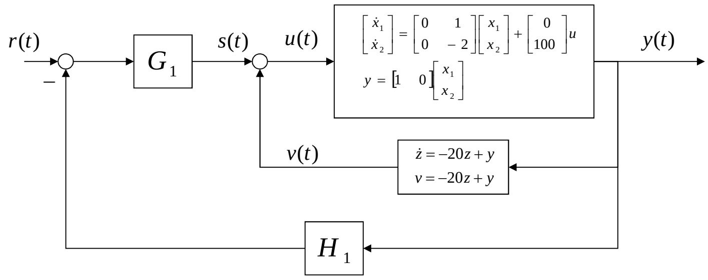
MODELOS DE ESTADO Y MATLAB

```
>>a=[0 1 0; -4 -2 4; -1 0 0];        %Definición matriz A
>>b=[0 4 1]';                        %Definición matriz B
>>c=[1/2 0 0];                       %Definición matriz C
>>d=0;                               %Definición matriz D
>>[n,d]=ss2tf(a,b,c,d)               %Conversión modelo de estado en F.T.
>>[aa,bb,cc,dd]=tf2ss(n,d)           %Conversión F.T. en modelo de estado.
```

La conversión de función de transferencia en modelo de estado proporciona una forma de representación del sistema correspondiente a una variación de variables de fase (forma canónica controlable).

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ \cdots \ 0 \ b_m \ \cdots \ b_2 \ b_1 \ b_0]$$

MODELOS DE ESTADO Y MATLAB




```
>>g1=0.4;
>>ag2=[0 1; 0 -2]; bg2=[0 100]';
>>cg2=[1 0]; dg2=0;
>>ah2=-20; bh2=1; ch2=-20; dh2=1;
>>% Modelo de estado de s a y:
>>[agsy,bgsy,cgsy,dgsy]=feedback(ag2,bg2,cg2,dg2,ah2,bh2,ch2,dh2,-1)
```

MODELOS DE ESTADO Y MATLAB

```
>>% Modelo de estado de r a y:
>>[a,b,c,d]=cloop(agsy,g1*bgsy,cgsy,g1*dgsy,-1)
>>[n,d]=ss2tf(a,b,c,d)
>>% Matriz de controlabilidad:
>>q=ctrb(a,b)
>>rank(q)
>>% Matriz de observabilidad:
>>p=obsv(a,c)
>>rank(p)
```

EJEMPLO

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

```
>>A=[0 1; -25 -4];
>>B=[1 1; 0 1];
>>C=[1 0; 0 1];
>>D=[0 0; 0 0];
>>[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1)
>>[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,2)
```

Cuando hay más de una entrada: ss2tf(A,B,C,D,u_i) devuelve las funciones de transferencia para la entrada u_i