$\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado

Un *cuerpo ordenado* es un conjunto no vacío C con dos operaciones internas $+$ y $\cdot$ tales que la terna $(C, +, \cdot)$ cumple los axiomas de cuerpo conmutativo, y además, existe una relación $\prec$ de orden total compatible con las operaciones $+$ y $\cdot$ de C. Es decir, $\prec$ es una relación binaria en $\mathbb{C}$ reflexiva ($z \prec z$ para todo $z \in \mathbb{C}$), antisimétrica (si $z_1 \prec z_2$ y $z_2 \prec z_1$ entonces $z_1 = z_2$) y transitiva (si $z_1 \prec z_2$ y $z_2 \prec z_3$ entonces $z_1 \prec z_3$), además, todos los elementos son comparables (dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica $z_1 \prec z_2$ ó $z_2 \prec z_1$) y verifica:

C1. Compatibilidad de $\prec$ con la suma: Si $z_1 \prec z_2 \Longrightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$ para todo $z_3 \in \mathbb{C}$.

C2. Compatibilidad de $\prec$ con el producto: Si $z_1 \prec z_2 \Longrightarrow z_1 \cdot z_3 \prec z_2 \cdot z_3$ para todo $z_3 \in \mathbb{C}$ tal que $0 \prec z_3$ y $z_3 \neq 0$.

Proposición. En $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ no existe ningún orden total compatible con su estructura de cuerpo.

Demostración: Para probarlo se procede por reducción al absurdo suponiendo que existe una relación de orden total $\prec$ en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura de cuerpo. Como todos los elementos de $\mathbb{C}$ han de ser comparables, entonces $0 \prec i$ ó $i \prec 0$. En el primer caso resulta

$$0 \prec i \underset{\substack{C2. \\ 0 \prec i}}{\Longrightarrow} 0 \cdot i \prec i \cdot i \Longrightarrow 0 \prec -1 \underset{\text{C1.}}{\Longrightarrow} 1 \prec 0 \underset{\substack{C2. \\ 0 \prec i}}{\Longrightarrow} 1 \cdot i \prec 0 \cdot i \Longrightarrow i \prec 0,$$

Por tanto, se tiene que $i \prec 0$ y $0 \prec i$, de donde, por la antisimetría de $\prec$, se sigue que $0 = i$, lo cual es falso. En consecuencia, no puede ser $0 \prec i$.

Tampoco puede ser $i \prec 0$ pues en ese caso se tendría que $0 \prec -i$ y entonces

$$i \prec 0 \underset{\substack{C2. \\ 0 \prec -i}}{\Longrightarrow} i \cdot (-i) \prec 0 \cdot (-i) \Longrightarrow 1 \prec 0 \underset{\substack{C2. \\ 0 \prec -i}}{\Longrightarrow} 1 \cdot (-i) \prec 0 \cdot (-i) \cdot \Longrightarrow -i \prec 0 \underset{\text{C1.}}{\Longrightarrow} -i + i \prec 0 + i \Longrightarrow 0 \prec i$$

Nuevamente se cumpliría a la vez $i \prec 0$ y $0 \prec i$. Luego, no puede ser $i \prec 0$.

En conclusión, $\mathbb{C}$ no puede tener estructura de cuerpo ordenado. $\square$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.