Capítulo 7

Formas bilineales y cuadráticas

7.1 Definición de forma bilineal

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación
$f : V \times V \longmapsto \mathbb{K}$ se dice que es una **forma bilineal** si $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, verifica:

$$f(v_1 + v_2, v_3) = f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) \qquad f(\alpha v_1, v_2) = \alpha f(v_1, v_2)$$
$$f(v_1, v_2 + v_3) = f(v_1, v_2) + f(v_1, v_3) \qquad f(v_1, \beta v_2) = \beta f(v_1, v_2)$$

Observaciones: El término “bilineal” indica que f es lineal respecto de los dos vectores o elementos de V. El uso del término “forma” en vez de “aplicación” indica que la imagen es un escalar del cuerpo $\mathbb{K}$.

Propiedades:

$$f(0_V, v) = f(u, 0_V) = 0 \quad \forall u, v \in V$$
$$f(-u, v) = -f(u, v) = f(u, -v)$$

Notación: $\boxed{f(u, v) = \rho \in \mathbb{K}}$

Se dice que la forma bilineal f de $V \times V$ en $\mathbb{K}$ es **simétrica**, si $\forall u, v \in V$ se cumple
$f(u, v) = f(v, u)$.

Consideraremos a partir de ahora únicamente formas bilineales definidas en $V = \mathbb{R}^n$, espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

7.2 Matriz asociada a una forma bilineal

Veremos primero la obtención de la matriz asociada para $\mathbb{R}^2$ y seguidamente escribiremos la expresión para $\mathbb{R}^n$

Tomando base canónica en $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, y siendo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ las coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ respecto de la base canónica, tenemos:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \vec{y}) = x_1 f(\vec{e}_1, \vec{y}) + x_2 f(\vec{e}_2, \vec{y}) =$$

$$x_1(y_1 f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + y_2 f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)) + x_2(y_1 f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + x_2 y_2 f(\vec{e}_2, \vec{e}_2)) =$$

$$x_1 y_1 f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + x_1 y_2 f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + x_2 y_1 f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + x_2 y_2 f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{con } G = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \quad \vec{x}^t \quad G \quad \vec{y}$$

G es la matriz asociada a la forma bilineal f o matriz de Gram de la forma bilineal f, respecto de la base canónica.

Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y considerando la base canónica $\{\vec{e}_1 \ldots \ldots \vec{e}_n\}$, se tiene:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = [\, x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \,]\, G \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ con } G = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \ldots & f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \ldots & f(\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \ldots & f(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

$$\boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t \; G \; \vec{y}} \qquad [1]$$

• <u>La forma bilineal f es simétrica si y sólo si la matriz asociada G es simétrica.</u>

Ejemplo 7.1 *Considerando la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ definida por:*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 8x_1y_1 + 9x_1y_2 + 10x_2y_1 + 11x_2y_2,$$

y los vectores $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (8, -6)$ y $\vec{w} = (7, -5)$

a) Obtenga la matriz de Gram asociada a f.

b) Obtenga $f(\vec{u}, \vec{v})$

c) Obtenga $f(\vec{v}, \vec{u})$

d) Obtenga $f(\vec{w}, \vec{v})$

a) $\quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2) = [\, x_1 \quad x_2 \,] \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, *por tanto* $A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

b) $\quad f((3, -2), (8, -6)) = [\, 3 \quad -2 \,] \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} = 2$

c) $\quad f((8, -6), (3, -2)) = [\, 8 \quad -6 \,] \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$ $\quad$ *Nótese como f no es simétrica.*

d) $\quad f((7, -5), (8, -6)) = [\, 7 \quad -5 \,] \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} = 0$

7.3 Cambio de base

Suponemos una base B distinta de la canónica, $B = \{\, \vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ ...,\ \vec{b}_n \,\}$. Entonces se tiene que $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$, siendo $[\vec{x}]_B$ las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base canónica, y $P_B = [\, \vec{b_1}\ \vec{b_2}\ ...\ \vec{b_n} \,]$. De la misma forma se transformarán las coordenadas de $\vec{y}$: $P_B[\vec{y}]_B = \vec{y}$.

Denotando P_B como P para abreviar y substituyendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en la ecuación [1] en función de las coordenadas $[\vec{x}]_B$ e $[\vec{y}]_B$ obtenemos:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (P[\vec{x}]_B)^t \; G \; P[\vec{y}\,]_B$$
$$f(\vec{x}, \vec{y}) = ([\vec{x}]_B)^t \; P^t \; G \; P \; [\vec{y}\,]_B$$

Por tanto la matriz asociada de Gram asociada a f respecto de la base B es $\boxed{G' = P^t \; G \; P}$ y las matrices G y G' se dice que son **congruentes** entre sí.

Despejando G en la ecuación anterior: $\qquad G = (P^t)^{-1} G' P^{-1}$

y teniendo en cuenta que $(P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$ se obtiene: $\qquad \boxed{G = (P^{-1})^t \; G' \; P^{-1}}$

Nótese:

• En el segundo miembro la matriz de la derecha es la transpuesta de la matriz de la izquierda.

• La matriz a la derecha es la matriz de paso de las coordenadas relativas a la base nueva (la base a la que está referida la matriz de Gram despejada) a las coordenadas referidas a la base canónica.

Matriz G referida a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ $\boxed{g_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)}$

Matriz G' referida a la base B de $\mathbb{R}^n$ $\boxed{g'_{ij} = f(\vec{b}_i, \vec{b}_j)}$

Nótese que al efectuar un cambio de base cambian las coordenadas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, y la matriz de Gram, pero no el valor ρ que toma la forma bilineal para cada par de vectores:

$$\boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) = \ \vec{x}^t \ G \ \vec{y} \ = ([\vec{x}]_B)^t \ G' \ [\vec{y}]_B = \rho}$$

- Tenemos dos definiciones equivalentes de matrices congruentes:
  - Dos matrices F y R son congruentes si corresponden a la misma forma bilineal respecto a distintas bases.
  - Dos matrices F y R son congruentes si existe P regular tal que $F = P^t R P$
- Todas las matrices congruentes entre sí son a su vez equivalentes entre sí (P^t y P son inversibles) y por tanto todas las matrices congruentes entre sí tienen el mismo rango.

Supuestas dos bases B y B', ninguna de ellas la canónica, la relación entre la matriz de Gram G referida a la base B y la matriz de Gram G' referida a la base B' es la siguiente:

$\boxed{G' = P^t \ G \ P}$

, siendo P la matriz de paso de las coordenadas relativas a la base B' a las coordenadas referidas a la base B. Es decir, $P[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$, y P tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

Si G es simétrica, entonces todas las matrices congruentes con G son también simétricas. Demostración: $G'^t = (P^t G P)^t = P^t G^t P = P^t G P = G'$.

OBSERVACIONES-RESUMEN, incluyendo resultados vistos en capítulos previos:

- Las matrices A y F correspondientes a la misma aplicación lineal en distintas bases son equivalentes entre sí.

  Existen matrices inversibles P y Q tales que:

  $A_{m \times n} = P F_{m \times n} Q$ ó $F_{m \times n} = P^{-1} A_{m \times n} Q$

- Las matrices A y F correspondientes al mismo endomorfismo en distintas bases, con la base inicial y la base final iguales, son semejantes entre sí.

  Existe matriz inversible P tal que: $A = PFP^{-1}$ o $F = P^{-1}AP$

- La matriz A correspondiente a un endomorfismo es diagonalizable por semejanza si tiene una semejante diagonal D. Es decir, existen matriz inversible P y matriz D tales que:

  $A = PDP^{-1}$ o $D = P^{-1}AP$

  En este caso los elementos de la diagonal han de ser autovalores de A, y la base respecto de la cual la matriz es diagonal es una base de autovectores en el mismo orden que los correspondientes autovalores en D. P tiene como columnas los vectores de la base de autovectores.

- Las matrices G y G' correspondientes a la misma forma bilineal en distintas bases son congruentes entre sí.

  Existe P inversible tal que $\quad G' = P^t G P \quad$ o $\quad G =^(P^{-1})^t G' P^{-1}$

- NUEVA DEFINICIÓN: Una matriz G es **diagonalizable por congruencia** si tiene una congruente diagonal. Es decir, si existen P inversible y $\hat{G}$ diagonal tales que:

  $\hat{G} = P^t G P \quad$ o $\quad G = (P^{-1})^t \hat{G} P^{-1}$

- Una matriz real es simétrica si y sólo sí es ortogonalmente diagonalizable por semejanza, es decir, si existen P ortogonal y D diagonal con $A = PDP^{-1}$. Los elementos de D son autovalores y las columnas de P una base ortonormal de autovectores, en el mismo orden, respecto del producto escalar habitual. Por ser P ortogonal, $A = PDP^{-1} = PDP^t$ (o $D = P^{-1}AP = P^tAP$), por tanto A real es simétrica si y sólo si A es a la vez semejante y congruente con las matrices D de autovalores.

Ejemplo 7.2 *Considerando la forma bilineal f del Ejemplo 1, los tres vectores $\vec{u} = (3,-2)$, $\vec{v} = (8,-6)$ y $\vec{w} = (7,-5)$ (también utilizados en el Ejemplo 1), y la base $B = \{(-1,1),(4,-3)\}$, se pide.*

a) Matriz G' asociada a f respecto de la base B

b) $f(\vec{u},\vec{v})$ utilizando la matriz G' y obviamente las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ referidas a la base B.

c) $f(\vec{w},\vec{v})$ utilizando la matriz G' y obviamente las coordenadas de $\vec{w}$ y $\vec{v}$ referidas a la base B.

a) $$\underset{P^t}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}} \underset{G}{\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}} = \underset{G'}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

b) Se calculan en primer lugar las coordenadas de los dos vectores referidas a la base B, obteniéndose: $[\vec{u}]_B = (1,1)$, $[\vec{v}]_B = (0,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

Comparando con el Ejemplo 1 vemos que la imagen es independiente de la base considerada.

c) $[\vec{w}]_B = (1,2)$, $[\vec{v}]_B = (0,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Vemos de nuevo, comparando con el Ejemplo 1, que la imagen es independiente de la base considerada.

7.4 Formas bilineales simétricas: vectores conjugados y núcleo

En esta y todas las secciones siguientes (salvo en la sección de Ejercicios), nos referiremos únicamente a formas bilineales simétricas

• Sea f una forma bilineal simétrica. Se dice que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ son **conjugados u ortogonales** con respecto a f si $f(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$.

Observación. $\vec{0}$ es conjugado de cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

• Sea f una forma bilineal simétrica. Se dice que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortogonal** o **conjunto de conjugados** respecto de f si cada par de vectores distintos del conjunto es un par conjugado u ortogonal.

• Sean f una forma bilineal simétrica y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los vectores conjugados de $\vec{v}$ con respecto a f es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ denominado **subespacio conjugado de** $\vec{v}$ o **subespacio ortogonal a** $\vec{v}$ respecto de f.

Subespacio conjugado de $\vec{v} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{v}, \vec{x}) = 0\}$

• Sea f una forma bilineal simétrica. Se define **núcleo** de f como el conjunto de vectores que son conjugados de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Ker} f = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \ \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

El núcleo de f contiene el vector $\vec{0}$ y es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Observación. $\vec{x}^t G \vec{y} = 0 \ \ \forall \vec{x} \ \Rightarrow \ G\vec{y} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \vec{y} \in \text{Ker} G$

Por tanto $\text{Ker} f = \text{Ker}\ G$.

Se dice que f es **regular** si $\text{Ker} f = \{\vec{0}\}$. Acabamos de ver que $\text{Ker} f = \text{Ker} G$, por tanto f es regular $\Leftrightarrow \text{Ker} G = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \text{rango} G = n \Leftrightarrow G$ inversible.

Si $\text{Ker} f = \text{Ker} G \neq \{\vec{0}\}$ se dice que la forma bilineal es **singular**. En este caso $\text{rango} G < n$ (y G singular).

7.5 Diagonalización congruente de una forma bilineal

Dada una forma bilineal simétrica f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, con matriz de Gram G respecto de la base canónica, se cumplen las siguientes propiedades:

• G es congruente con infinitas matrices diagonales reales D, es decir, existen infinitas matrices D tales que $P^t G P = D$. Las columnas de P son los vectores de la base B respecto de la cual la matriz de Gram es D.

• Toda base B de $\mathbb{R}^n$ respecto de la cual la matriz de Gram sea diagonal es conjunto ortogonal o conjunto de vectores conjugados respecto de la forma bilineal f, diciéndose de esa base que es **base ortogonal**.

En efecto, los elementos de D verifican $d_{ij} = f(\vec{b}_i, \vec{b}_j)$, siendo $\vec{b}_k$ los vectores de B, y por ser D diagonal $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$, y por tanto cada par de vectores base distintos es un par ortogonal.

• Todas las matrices diagonales reales D congruentes con G tienen el mismo número de elementos positivos p en la diagonal, el mismo número de elementos negativos q, y por tanto el mismo número de elementos no nulos $r = p + q$, siendo $r = \text{rango} G$. Se le asigna entonces a cada forma bilineal f el par (p, q), que es invariante frente a cambios de base, o dicho de otra forma, que es invariante para matrices congruentes entre sí. En los tratados de Álgebra y Geometría se dan las tres definiciones de **signatura** siguientes, de las cuales adoptaremos la primera:

- sig $f = (p, q)$
- sig $f = p$
- sig $f = p - q$

A p se le denomina también **índice de inercia**.

Entre las matrices diagonales congruentes con G se define la **matriz canónica de congruencia de G** o **matriz de Sylvester**, como aquella cuyos elementos diagonales son: "1" los p primeros, "-1" los q siguientes y "0" los restantes $n - p - q$. A las matrices diagonales congruentes que tengan estos mismos elementos, aunque en otro orden, las denominamos **pre-Sylvester**.

7.6 Obtención de matriz congruente diagonal mediante operaciones elementales

En esta sección presentamos la obtención de matrices diagonales congruentes con la matriz G mediante el método de "operaciones elementales". Por simplicidad consideramos que la matriz G inicial está referida a la base canónica.

1) Aplicando a G una serie de operaciones elementales por filas de tipo reemplazamiento o de tipo permutación, y las mismas operaciones y en el mismo orden sobre las columnas, llegaremos a una matriz diagonal congruente con G, que denotamos $\hat{G}$.

Considerada G, aplicar las operaciones antes mencionadas corresponde a obtener el siguiente producto matricial:

$\boxed{F_a \ \dots \ F_1 \ G \ C_1 \ \dots \ C_a}$ donde F_1, ... , F_a es la secuencia de operaciones elementales por filas, y C_1, ... , C_a es la secuencia de esas mismas operaciones elementales pero por columnas.

Denotando $P_1 = C_1 \dots C_a$, se tiene que:

$F_a \ \dots \ F_1 = C_a^t \dots C_1^t = (C_1 \dots C_a)^t = P_1^t$, por tanto, sustituyendo en la primera expresión del apartado obtenemos:

$F_a \ \dots \ F_1 \ G \ C_1 \ \dots \ C_a = P_1^t \ G \ P_1 = \hat{G}$, con $\hat{G}$ diagonal y siendo G y $\hat{G}$ congruentes entre sí.

Las columnas de P_1 forman la base $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ respecto de la cual la matriz de Gram es $\hat{G}$.

La demostración de que $Fi = C_i^t$ para las operaciones elementales consideradas se presentó en un capítulo anterior, donde obtuvimos $C_{ij(\alpha)}^t = F_{ij(\alpha)}$ y $C_{ij}^t = C_{ij} = F_{ij}$.

La matriz diagonal $\hat{G}$ obtenida mediante las operaciones elementales tiene la forma:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{g}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \hat{g}_{nn} \end{bmatrix}$$, y la base B a la que está referida es base ortogonal.

A partir de esta matriz diagonal congruente ya podemos determinar la signatura de la forma bilineal $sigf = (p, q)$ siendo p y q el número de elementos positivos y el número de elementos negativos, respectivamente, de la diagonal principal.

2) En este apartado vemos como obtener a partir de la diagonal congruente $\hat{G}$ una diagonal congruente pre-Sylvester. Para ello efectuamos:

$D^t\ \hat{G}\ D$, siendo $D = \{d_{ii}\}$ con $\quad d_{ii} = \dfrac{1}{\sqrt{|\hat{g}_{ii}|}}$ si $\hat{g}_{ii} \neq 0$ *y* $d_{ii} = 1$ en caso contrario

El resultado es una matriz denominada "pre-Sylvester": matriz diagonal, con p elementos iguales a 1, q elementos iguales a -1 y $n-p-q$ elementos iguales 0 en la diagonal principal.

3) Aplicando las matrices permutadoras (por cada una de filas una de columnas, transpuesta de la anterior), que sitúan los elementos 1 en las p primeras posiciones de la diagonal principal, los -1 en las q siguientes, y 0 en las restantes $n-p-q$, se obtiene la matriz canónica de congruencia o matriz de Sylvester.

ESQUEMA:

$Per^t\ D^t\ P_1^t\ \ G\ \ P_1\ D\ Per = S_y$

que podemos escribir como:

$(P_1\ D\ Per)^t\ \ G\ \ (P_1\ D\ Per) = S_y$

$P = P_1\ D\ Per$ es la matriz de cambio de base desde la base nueva, B, respecto de la cual la matriz de Gram es la matriz de Sylvester, a la base original de G, que hemos tomado como la canónica. Por tanto las columnas de P son las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica.

$f(\vec{x}, \vec{y}) = \ \vec{x}\quad G\quad \vec{y} = \ \ \rho$

$f(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x}]_B^t\ S_y\ [\vec{y}]_B = \rho \qquad$ con $S_y = P^t\ G\ P$ y $P[\vec{x}]_B = \vec{x}$

Ejemplo 7.3 *Sea f la forma bilineal en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz estándar asociada es* $G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Obtén la diagonal congruente de Sylvester, y una base a la que esté asociada.*

En este ejercicio obtendremos una base respecto de la cual la matriz de Gram es la canónica congruente o matriz de Sylvester, y la propia matriz de Sylvester.

A partir de la matriz $[\ G \mid I\ ]$ realizaremos en G las o.e en filas y columnas, y en la matriz I sólo las o.e. en filas. El interés de las operaciones en I es conocer la base a la que está referida la matriz de Sylvester.

$$\underbrace{P_1^t}_{\substack{o.e.\ por \\ filas}}\ G\ \underbrace{P_1}_{\substack{o.e.\ por \\ columnas}} = \hat{G}$$

$$\underbrace{P_1^t}_{\substack{o.e.\ por \\ filas}}\ I \qquad\qquad = P_1^t$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21(-2)} \\ F_{31(1)}}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{C_{21(-2)} \\ C_{31(1)}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{32(-1/4)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \underset{C_{32(-1/4)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & -1/4 & 3/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} \qquad P_1^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1/4 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(recoge la secuencia de o.e. por filas realizada)

$$\Downarrow$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & -2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\hat{G}$ es una matriz diagonal congruente con G y es la matriz de la forma bilineal respecto de la base $B = \{(0,1,0),(1,-2,0),(-1/4,3/2,1)\}$ (tomada de las columnas de P_1).

$$\hat{G} = P_1^t \ G \ P_1$$

A continuación partimos de $\hat{G}$ y obtendremos una diagonal congruente pre-Sylvester.

$$D^t \cdot \hat{G} \cdot D$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{D^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}}_{\hat{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente aplicamos la permutación necesaria para obener la matriz congruente de Sylvester, que es la permutación de las filas segunda y tercera, y la de las columnas segunda y tercera.

$$Per = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = S_y}$$

Obtengamos a continuación la base B respecto a la cual la matriz de Gram es S_y:

$S_y = Per^t D^t P_1^t \ G \ P_1 D Per = (P_1 D Per)^t \ G \ P_1 D Per$, por tanto la matriz de cambio de base de B a la canónica es:

$$P = P_1 D Per = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & -2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} & -1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas de P son los vectores de la base B.

$\boxed{B = \{(0,1,0), (\frac{-1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{1}{2}, -1, 0)\}}$

Se puede comprobar que $P^t G P = S_y$

7.7 Formas cuadráticas

Sea f una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. Se denomina **forma cuadrática asociada** a f a la aplicación w de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$w(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) = \rho \in \mathbb{R}$$

La definición es sencilla, pues simplemente se sustituye el segundo vector, o vector $\vec{y}$, por $\vec{x}$, en la forma bilineal.

Observamos que $w(\lambda\vec{x}) = \lambda^2 w(\vec{x})$. En particular $w(-\vec{x}) = w(\vec{x})$

Matriz asociada a una forma cuadrática y cambio de base

La matriz asociada a w respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la misma que la de su correspondiente forma bilineal f, por tanto:

$$w(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) = [\, x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \,]\, G \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ siendo}$$

$$G = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{bmatrix}, \text{ con } G \text{ simétrica} \quad (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = f(\vec{e}_j, \vec{e}_i)\ \forall i \neq j)$$

$$\boxed{w(\vec{x}) = \vec{x}^t\ G\ \vec{x}}$$

De igual modo, suponiendo una base B distinta de la canónica, tal que $P[\vec{x}]_B = \vec{x}$, tendremos:

$$w(\vec{x}) = ([\vec{x}]_B)^t\ P^t\ G\ P\ [\vec{x}]_B = ([\vec{x}]_B)^t\ G'\ [\vec{x}]_B.$$

$G' = P^t G P$ es la matriz de Gram respecto de la base B. G' es también simétrica y $g'_{ij} = f(\vec{b}_i, \vec{b}_j)$ siendo $\vec{b}_k$ los vectores de la base B.

Si rango $G = n$ se dice que la forma cuadrática es **ordinaria**, y si rango $G < n$ se dice que es **degenerada**.

Expresión desarrollada de la forma cuadrática:

$$w(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Obviamente, respecto de una base B en la que la matriz de Gram sea diagonal la forma cuadrática tiene una representación más sencilla, al desaparecer los términos cruzados $x'_i x'_j$ con $i \neq j$.

$$w(\vec{x}) = d_{11}(x'_1)^2 + \ldots + d_{nn}(x'_n)^2 \qquad d_{ii} = f(\vec{b}_i, \vec{b}_i)$$

x' denota las coordenadas relativas a la base B.

La expresión de una forma cuadrática relativa a una base canónica congruente es la siguiente:

$$\boxed{w(\vec{x}) = [(x'_1)^2 + \ldots + (x'_p)^2] - [(x'_{p+1})^2 + \ldots + (x'_{p+q})^2]}$$

Ejemplo 7.4 *Siendo $w : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por:*

$$w((x_1, x_2, x_3)) = -2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$$

a) Obtenga su matriz G asociada.

b) Obtenga $w((1, 2, 3))$

a) $f((x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3/2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, *por tanto* $G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3/2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $w((1, 2, 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3/2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 48$

Ejemplo 7.5 *Hallar la expresión matricial referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ tal que:*
- *(1,1,0) es ortogonal a sí mismo respecto de la forma bilineal asociada f.*
- *(2,0,1) pertenece al núcleo de la forma bilineal asociada f.*
- *la forma cuadrática aplicada a los vectores $(0, 0, 1)$ y $(1, 1, -1)$ da respectivamente 8 y 4.*

$$G = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b+d \\ c+e \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a + 2b + d = 0 \;\; [1]$

- $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \;\forall\; (x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ bx+dy+ez \\ cx+ey+fz \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$2(ax + by + cz) + cx + ey + fz = 0 \Rightarrow$

$$(2a + c)x + (2b + e)y + (2c + f)z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 & [2] \\ 2b + e = 0 & [3] \\ 2c + f = 0 & [4] \end{cases}$$

Otro método consiste en aplicar que $(2, 0, 1) \in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow (2, 0, 1) \in \mathrm{Ker}G$, entonces la ecuación matricial que se obtiene es:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2b + e = 0 \\ 2c + f = 0 \end{cases}$$

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ e \\ f \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow \boxed{f = 8} \quad [5]$

• $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b-c \\ b+d-e \\ c+e-f \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow$

$a+b-c+b+d-e-c-e+f=4 \Rightarrow a+2b-2c+d-2e+f=4 \quad [6]$

$f=8 \Rightarrow \boxed{c=-4}$ *(por ecuación [4])* $\Rightarrow \boxed{a=2}$ *(por ecuación [2])*

Sustituyendo la ecucación [1] ($a+2b+d=0$*) en la ecuación [6], obtenemos:* $-2c-2e+f=4 \Rightarrow 2e=f-2c-4 \Rightarrow 2e=8+8-4=12 \Rightarrow \boxed{e=6}$

$e=6 \Rightarrow \boxed{b=-3}$ *(por ecuación [3]).*

Sustituyendo a y b en la ecuación [1]: $2-6+d=0 \Rightarrow \boxed{d=4}$

Solución: $G = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

7.8 Clasificación de formas cuadráticas

La clasificación de formas cuadráticas es la siguiente:

- Definida positiva: $w(\vec{x}) \geq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $w(\vec{x})=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$
  sig $w=(n,0)$
- Definida negativa: $w(\vec{x}) \leq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $w(\vec{x})=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$
  sig $w=(0,n)$
- Semidefinida positiva: $w(\vec{x}) \geq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\exists \; \vec{y} \neq \vec{o} \; / \; w(\vec{y})=0$
  sig $w=(r,0)$ con $r<n$ (r por rango)
- Semidefinida negativa: $w(\vec{x}) \leq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\exists \; \vec{y} \neq \vec{0} \; / \; w(\vec{y})=0$
  sig $w=(0,r)$ con $r<n$ (r por rango)
- Mixtas o indefinidas: el resto de los casos
  sig $w=(p,q)$ con $p>0$ y $q>0$

7.9 Diagonalización ortogonal de formas cuadráticas

Debido a que la matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica, a partir de la matriz G referida a la base canónica podemos obtener una matriz congruente que sea diagonal, siendo los elementos de la diagonal los autovalores de G. Esta matriz diagonal sería congruente y semejante respecto de G.

$D=P^{-1}GP=P^tGP$ siendo las columnas de P una base de autovectores, ortonormal respecto del producto escalar habitual.

La matriz del ejemplo 7.3 tiene por ecuación característica:

$\lambda^3-3\lambda^2-12\lambda+5=0$, que tiene raíces reales, pero no enteras.

Nosotros sólo hemos estudiado diagonalización por semejanza en el caso de matrices con autovalores enteros, por lo que no podríamos obtener las matrices P y D en este caso.

Sí las podríamos calcular con **Matlab** utilizando la función "eig()", que obtiene una diagonalización ortogonal siempre que ésta sea posible, y en el caso de matrices reales y simétricas lo es.

$>> A = [\ 0\ 2\ \ -3\ ;\ 2\ 1\ \ -1\ ;\ \ -3\ \ -1\ 2\ ];$

$>> [\ P,\ D\ ] = \mathrm{eig}(A)$

ans =

$$P = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0.0200 & -0.5739 \\ -0.3311 & 0.8331 & -0.4432 \\ 0.4693 & 0.5528 & 0.6886 \end{bmatrix}$$

ans =

$$D = \begin{bmatrix} -2.5283 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3845 & 0 \\ 0 & 0 & 5.1439 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que $AP = PD = \begin{bmatrix} -2.0699 & 0.0077 & -2.9522 \\ 0.8370 & 0.3203 & -2.2797 \\ -1.1864 & 0.2125 & 3.5422 \end{bmatrix}$

y que P es ortogonal ($P^tP = I$)

7.10 Ejercicios

Ejercicio 7.1 *Dada la forma cuadrática con matriz asociada respecto de la base canónica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Obtener una matriz congruente diagonal D_1 y la base B_1 a la que está referida, utilizando el método de las operaciones elementales.

b) Obtén la expresión de la forma cuadrática relativa a la base B_1

c) Obtener una matriz congruente diagonal D_2 y la base a la que está referida B_2 utilizando el método de la diagonalización ortogonal por semejanza.

d) Obtén la expresión de la forma cuadrática relativa a la base B_2

e) Obtén la signatura de la forma cuadrática.

Ejercicio 7.2 *Clasifica la forma cuadrática w en función del valor de a.*

$w(\vec{x}) = x^2 + 2xz + y^2 + 4yz + az^2$

7.11 Soluciones

1.

a) Aplicando operaciones elementales se obtiene la matriz congruente diagonal

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ respecto de la base } B_1 = \{ (1,0,0),\ (-2,1,0),\ (1,0,1) \}$$

b) $w(\vec{x}) = x'^2 - 4y'^2$

c) A partir de la ecuación $A = \begin{vmatrix} 1-s & 2 & 1 \\ 2 & -s & 2 \\ 1 & 2 & 1-s \end{vmatrix} = 0$ obtenemos que A tiene 3 autovalores distintos, que son 0, 4 y -2.

Los subespacios propios correspondientes son:

$V_4 =< (1,1,1)/\sqrt{3} >$

$V_{-2} =< (1,-2,1)/\sqrt{6} >$

$V_0 =< (1,0,-1)/\sqrt{2} >$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ respecto de la base } B_2 = \{ (1,1,1)/\sqrt{3},\ (1,-2,1)/\sqrt{6},\ (1,0,-1)/\sqrt{2} \}$$

d) $w(\vec{x}) = 4x'^2 - 2y'^2$

e) Signatura de $w : (1,1)$

2.

Al no pedirnos una base, sólo tenemos que aplicar el método de canonización basado en operaciones elementales a la matriz G, es decir, no hace falta trabajar con la matriz $[\ G \mid I\ ]$.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \underset{F_{31(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 \end{bmatrix} \underset{C_{31(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 \end{bmatrix} \underset{F_{32(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix} \underset{C_{32(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

Para $a < 5$ forma cuadrática mixta

Para $a = 5$ forma cuadrática semidefinida positiva

Para $a > 5$ forma cuadrática definida positiva