

- 1) Sea $X = \cup_{i \in I} A_i$ una **partición** de X ; es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación “ $x \mathcal{R} y \iff x$ e y pertenecen al mismo A_i ”, es una relación de equivalencia X .
Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X , las clases de equivalencia definen una partición de X .
En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.
- 2) Si $f : X \rightarrow V$ es una **función**, probar que “ $x \mathcal{R} y$ si $f(x) = f(y)$ ” define una relación de equivalencia en X , y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente X/\mathcal{R} y $Im(f)$.
- 3) Fijado un entero positivo n , definimos $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre \mathbb{Z} dada por: $m \mathcal{R} k \iff m - k \in n\mathbb{Z}$. Demostrar que es una relación de equivalencia.
Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (se lee \mathbb{Z} módulo n).
- 4) Es habitual y más cómodo utilizar la notación \mathbb{Z}_n para referirse a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.
 - i) $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(\bar{m}) = m$ (donde $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ denota la clase del entero m).
 - ii) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $g(m) = \bar{m}$.
 - iii) $G : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $G((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{m + k}$.
 - iv) $H : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $H((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{mk}$.
- 5) Considerar la relación definida sobre el plano \mathbb{R}^2 por: $(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff xy = x'y'$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.
- 6) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación $(n, m) \mathcal{R} (n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}$.
 - a) Demuestra que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.
 - c) Describe el conjunto cociente.
 - d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?
- 7) Sea F el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . En F se define la siguiente relación:
 $f \mathcal{R} g \iff \text{existe } r \in \mathbb{R}, r > 0 \text{ tal que } f(x) = g(x) \text{ para } |x| < r$.
Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia sobre F .
- 8) Sea \mathcal{S} una relación binaria en un conjunto X , que es reflexiva y transitiva, pero no es anti-simétrica.
 - a) Dar un ejemplo de una relación de este tipo.
 - b) Demostrar que la relación \sim , definida por $a \sim b \iff (a \mathcal{S} b) \wedge (b \mathcal{S} a)$, es una relación

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- 9) Considerar las relaciones en \mathbb{Z} definidas por $m\mathcal{R}_1n \iff 5|(m+2n)$; $m\mathcal{R}_2n \iff 4|(9m+3n)$ ($k|\ell$ significa “ k divide a ℓ ”).
- Decidir si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son relaciones de equivalencia.
 - En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.
- 10) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A .
En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación: $X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B)$.
- Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?
- 11) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y$ si y sólo si $\min X = \min Y$.
- Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
 - ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?
- 12) Sean A y B dos conjuntos equipotentes. Sean A' y B' dos conjuntos también equipotentes. Demostrar lo siguiente:
- $A \times A'$ es equipotente a $B \times B'$.
 - Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es equipotente a $A \times \{0, 1\}$
 - Si $A \cap A' = B \cap B' = \emptyset$ entonces $A \cup A'$ y $B \cup B'$ son equipotentes.
- 13) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.
- 14) Sea A un conjunto infinito.
- Demostrar que si a es un elemento de A , el conjunto $A \setminus \{a\}$ es equipotente a A . (Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a\}$ un subconjunto infinito y numerable.)
 - Demostrar que si $F \subset A$ es un subconjunto finito, entonces $A \setminus F$ es equipotente a A .
- 15) Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$; d) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$; e) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
 - El conjunto de todas las raíces reales de todos los polinomios con coeficientes reales;
 - El conjunto de todas las raíces reales (rationales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama “conjunto de los números algebraicos”);
 - El conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} que tienen dos elementos;
 - El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.
- 16) Demuestra que hay infinitos enteros primos de la forma $4n - 1$ y de la forma $6n - 1$.
- 17) Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
- 18) Sabemos que dados dos enteros positivos a y b , existen primos p_1, \dots, p_s de modo que $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ y $b = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}$ para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$.
- Expresa el $\text{mcd}(a, b)$ y el $\text{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**