Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

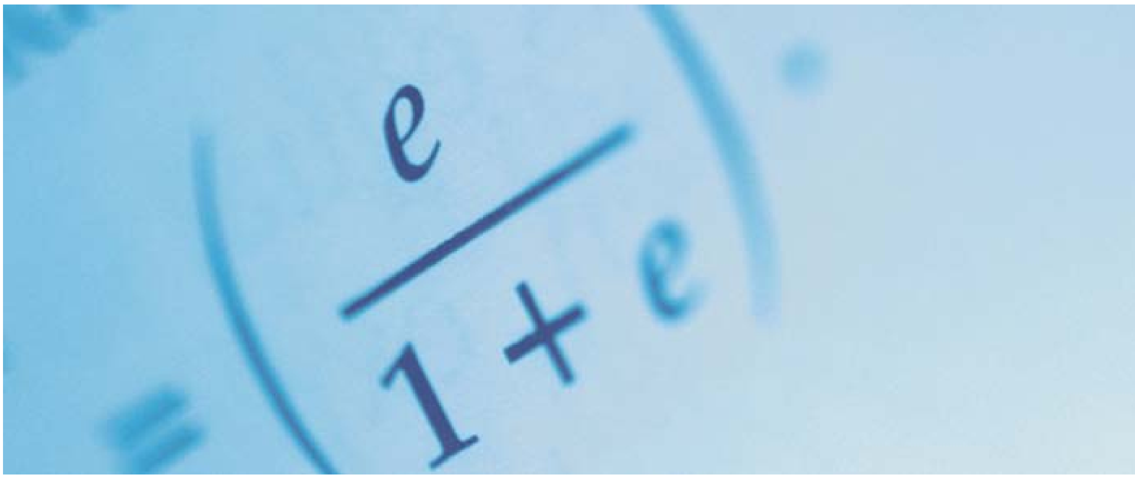
LAS FUNCIONES ELEMENTALES Y EL DOMINIO

Índice

Presentación 3
Las funciones 4
La importancia de las funciones en Economía 5
El dominio de una función 6
Funciones elementales: funciones polinómicas 7
Funciones elementales: funciones racionales 8
Funciones elementales: funciones irracionales 9
Las funciones definidas a trozos. El valor absoluto 10
Ejemplos 11
Resumen 12

Presentación

En este tema se presenta la importancia del concepto de función, las características más importantes de las funciones elementales y el concepto de dominio.



Se estudiará:

- Cómo se define una función.
- Por qué son importantes las funciones en el campo de la Economía.
- El concepto del dominio de una función.
- Algunas funciones elementales y sus características.
- Cómo se calcula el dominio de las funciones elementales.

Las funciones

Se puede definir una función como una **relación entre dos o más cantidades** (variables) pertenecientes a dos conjuntos, de forma que a cada elemento le corresponde un elemento (y solo uno) del otro conjunto.

Según esta definición se puede escribir una función como una **tabla** en la que se relacionan los distintos elementos de los conjuntos *x* e *y*:

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
$\vdots$	$\vdots$

Una función es, por tanto, una magnitud que depende de una o varias variables. Esta dependencia se escribe de forma general como *f(x)* donde *x* de la variable de la que depende.

Las funciones indicarán el modo en que se relacionan las variables y estas relaciones se expresarán mediante operaciones matemáticas.

Es importante señalar que, para que una relación sea una función, todos los elementos tienen que tener un único valor asignado. Los ejemplos de los dibujos **no corresponden a funciones**:

La importancia de las funciones en Economía

La importancia de la utilización de las funciones en Economía (como en muchas otras disciplinas) radica en que, gracias a ellas, se puede **describir cualquier variación o cambio de una cantidad**.

De esta manera, se puede determinar la **producción** de una empresa a partir de las materias primas utilizadas. Una función es también la que mide el **beneficio** que se obtendrá en una empresa, el coste, la utilidad, etc. Incluso la **oferta y la demanda** son funciones.

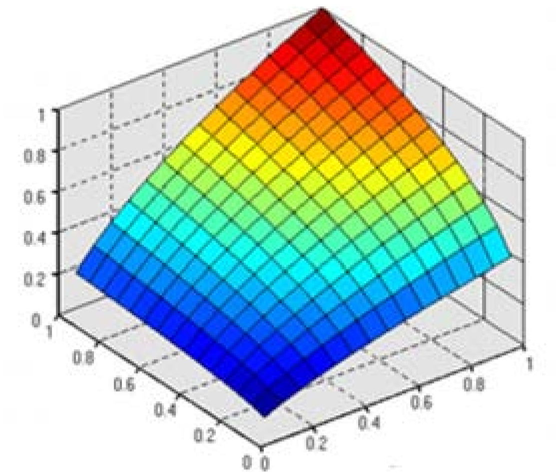
La importancia de las funciones radica también en el hecho de poder, a partir de ellas, determinar cómo cambian estas variaciones. Estos cambios se producen de forma rápida o lentamente.

Algunos ejemplos de funciones económicas

La **función de producción** es la relación que existe entre el producto obtenido y la combinación de factores que se utilizan en su obtención. Estos factores son el capital, el trabajo, los servicios, las materias primas, etc.

Ejemplo

Función Cobb-Douglas



$y = k^{\alpha} n^{1-\alpha}, \alpha = 0.35$

Función Cobb-Douglas

La **función beneficio** se puede calcular a partir de los ingresos y los costes, de forma que donde *x* es la cantidad producida de un bien.

B(x)=I(x)-C(x)

Función Cobb-Douglas

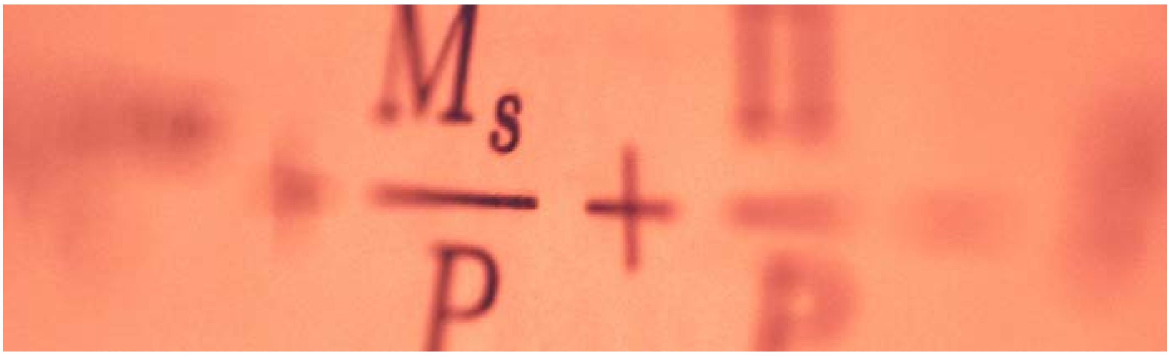
Una función de producción muy conocida es la llamada de Cobb-Douglas en honor a sus descubridores.

El dominio de una función

Una vez determinada la función es necesario conocer su **dominio**.

Llamaremos dominio de una función, y lo denotaremos por *Dom f*, al conjunto de los valores de *x* para los que la función está definida.

O en otras palabras, el dominio está formado por los valores que podemos sustituir en la *x* para los que la función tiene sentido.



Es importante conocer cuál es dominio de una función, ya que no todas las funciones se pueden calcular para cualquier valor de *x*.

Por ejemplo, si se está trabajando con una función de producción donde *x* cuenta el número de unidades producidas, se sabe que ese valor nunca podrá ser negativo, pues no tiene sentido producir un número negativo de bienes

Funciones elementales: funciones polinómicas

A continuación, se presenta cómo calcular el **dominio** de algunas de las **funciones elementales**.

Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas tienen como dominio todos los números reales, ya que es posible sustituir cualquier valor de *x* en el polinomio y este tiene sentido. Se puede sustituir cualquier valor real en el lugar de la *x* y lo que se obtiene es, también, un **número real**.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Ejemplo: calcular el **dominio** de las siguientes funciones:

- $f(x) = 3x + 5$
- $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x - 11$
- $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

Ejercicio

Solución

Solución

Todos los estos polinomios tiene como dominio **R**.

.

Funciones elementales: funciones racionales

Funciones racionales

Las funciones racionales se construyen mediante el cociente de dos polinomios *p(x)* y *q(x)*.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Su dominio son todos los **números reales excepto aquellos que anulan el denominador**.

¿Por qué? Porque si se divide un número entre *0* no se obtiene un número real, sino ∞. En este caso la función no tiene sentido dentro del conjunto de los números reales.

Ejemplo: calcular el dominio de las siguientes **funciones racionales**:

- $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-1}$ = $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-1} \cdot Dom f = \mathbf{R} - \{1\}$
- $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$ = $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x-3} \cdot Dom f = \mathbf{R} - \{3, -1\}$
- $f(x) = \dfrac{2x+9}{x^2+2x+5}$ = $f(x) = \dfrac{2x+9}{x^2+2x+5} \cdot Dom f = \mathbf{R}$

Funciones elementales: funciones irracionales

Funciones irracionales

$$f(x) = \sqrt[n]{\text{una funcion}}$$

El dominio de estas funciones depende del grado de la raíz de modo que:

- Si el grado de la raíz es par: el dominio de la función serán los valores de *x* que hacen que el **radicando** sea mayor o igual a *0*.
- Si el grado de la raíz es impar: el dominio son todos los números reales.

Radicando

Número del que se extrae la raíz $\sqrt[raíz]{\text{radicando}}$

Ejemplo: Calcular el dominio de las siguientes funciones irracionales:

$$f(x) = \sqrt{x-7}.\ Dom f = [7, \infty).$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}.\ Dom f = \mathbf{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}.\ Dom f = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

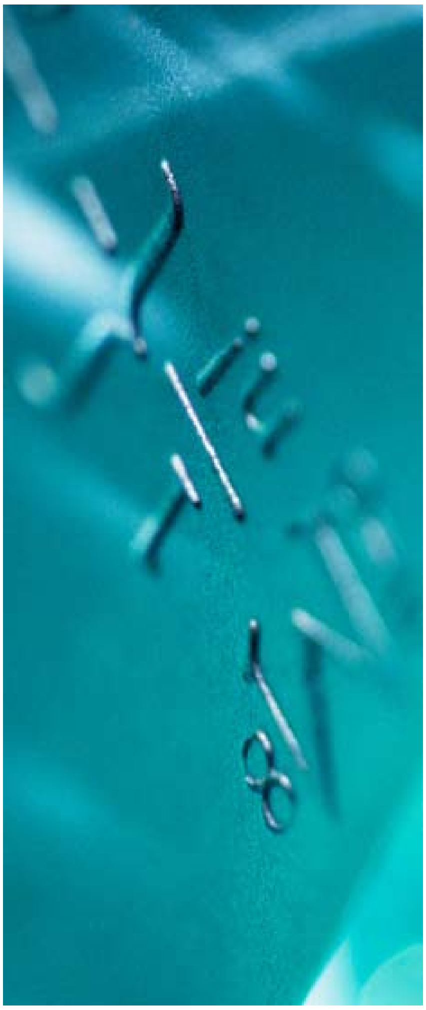
Funciones exponencial y logarítmica

$$f(x) = e^x \quad f(x) = \ln x$$

El dominio de la función exponencial es todo *R*.

El dominio de la función logarítmo son todos los valores positivos.

Las funciones definidas a trozos. El valor absoluto



Las **funciones definidas a trozos** utilizan diferentes expresiones según los distintos valores de *x*.

Un ejemplo de **función definida a trozos** es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & x < 3 \\ x - 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

El dominio de la función dependerá de las **expresiones** y de las **regiones**. Por ello habrá que observar las características de cada expresión y el lugar en las que está definida.

El **valor absoluto** de un número permite conocer su valor sin importarle el signo que tiene. Por ejemplo *|5|=|-5|=5*. Resulta especialmente práctico cuando se habla de distancias.

Se puede expresar el valor absoluto de una función como una función definida a trozos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: expresar como una función definida a trozos la función *f(x)=|x+5|*.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & x \geq -5 \\ -x - 5 & x < -5 \end{cases}$$

Ejemplos

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$$

$Dom\, f = (-\infty, -1] \cup (3, \infty)$

Comentarios: Observa que el denominador no puede ser 0, por ser una función racional. Para que el radicando sea positivo: ambas funciones deben ser positivas o ambas negativas.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$Dom\, f = \mathbf{R} - \{0\}$

Comentarios: Fíjate que el exponente es una función racional por lo que el denominador no puede ser 0.

$$f(x) = \ln(1 - x^2)$$

$Dom\, f = (-1, 1)$

Comentarios: Observa que no está definido el logaritmo del 0, por eso no incluimos en el dominio los extremos del intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ \frac{1}{x^2+2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$Dom\, f = \mathbf{R} - \{0\}$

Comentarios: Ten en cuenta que los valores que anulan el denominador son el 0 y el -2, pero el -2 no está incluido dentro de $x \geq 0$

Resumen

En este tema se ha visto el concepto de función como una relación entre dos o más variables y su importancia en el campo de la Economía.

Se ha definido el dominio de la función como el conjunto de valores de *x* para los que está definida la función y se han calculado los dominios para las funciones más elementales.

Función	Dominio
Polinomios	**R**
Racionales	R-{los valores que anulan el denominador}
Raíces	(índice par) valores que hacen el radicando mayor o igual que 0
Exponencial	**R**
Logaritmo	Valores positivos