Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

Límites de funciones

Índice

Presentación

En este tema se presenta el concepto de límite de una función. La idea de límite de una función está relacionada con el lugar hacia el que se acerca la función cuando se aproxima a un punto dado.

Para definir el concepto de límite se verán algunos ejemplos prácticos y se definirá el concepto de límite lateral de una función en un punto.

Se estudiarán otros límites cuyo resultado es el ∞, llamados límites infinitos.
El estudio del comportamiento de las funciones cuando *x* toma valores muy grandes da lugar a los límites en el infinito.

Concepto intuitivo de límite

En muchas ocasiones nos va a interesar conocer cómo se comporta una función "cerca" de un punto, o más precisamente, "tan cerca como se quiera" de un punto.

Nos interesará resolver cuestiones del tipo:

- **Dada la función *f(x)=2x+1***. En el valor *x=2*, se cumple que *f(2)=5*. Si nos acercamos mucho a *2* (tomando valores cercanos), los valores de la función que se obtiene, ¿se acercan también a *5*?
- **Una función que no está definida en un punto**, ¿es posible conocer qué valores toma dicha función cerca de ese punto?

Estas ideas llevan a definir el concepto de **límite**. Para ello, se comienza viendo algunos ejemplos:
Consideremos la función *f(x)=2x+1*, si tomamos valores muy cercanos a *x=2* (algo más grandes y algo más pequeños), ¿qué ocurre con la función?:

Valores más pequeños que 2	F(x)=2x+1	F(x)=2x+1	Valores más grandes que 2
1	2(1)+1=3	2(2.1)+1=5.2	2.1
1.9	2(1.9)+1=4.8	2(2.1)+1=5.2	2.01
1.99	2(1.99)+1=4.98	2(2.01)+1=5.02	2.001
1.999	2(1.999)+1=4.998	2(2.001)+1=5.002	2.0001
1.9999	2(1.9999)+1=4.9998	2(2.0001)+1=5.0002	2.00001
aproximación	aproximación	aproximación	aproximación
2	5	5	2

En este caso se escribe $\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$ y se dice que el límite cuando *x* tiende a *2* de la función *2x+1* es *5*.

Concepto de límite a través de la gráfica de una función

Se presenta ahora el concepto de límite de una función en un punto observando el comportamiento de la función mediante su gráfica. Se consideran las siguientes gráficas de funciones:

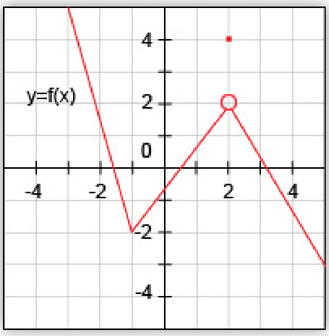


Figura 1

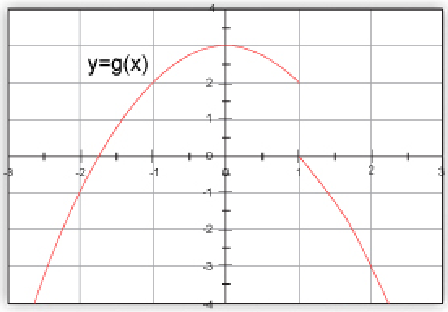


Figura 2

Observemos la gráfica de la función *f(x)*:¿qué valor toma la gráfica en el punto *x=2*? ¿qué valor toma la función cuando nos acercamos al punto *x=2* por la derecha?, ¿y por la izquierda?

En *x=2*, la función toma el valor *4*, o lo que es lo mismo *f(2)=4*. Sin embargo, cuando nos aproximamos al *2* por la derecha, la función se aproxima a *2*, al igual que si nos aproximamos por la izquierda.

Si observamos la gráfica de la función *g(x)*: ¿a qué valor se acerca la función cuando se hace una aproximación a *1* por la derecha?, ¿y por la izquierda?

En este ejemplo, si se hace una acercamiento al valor *1* por la derecha la función se acerca al valor *0*, pero si se hace aproximación por la izquierda, la función se tiende a *2*.

Límites laterales

En los ejemplos anteriores se han tomado valores algo más grandes y más pequeños que uno dado, o lo que es lo mismo, a la derecha y a la izquierda de un valor *x*. Esta forma de aproximación lleva a definir los **límites laterales**.

Si al tomar valores de x a la derecha de x_0, cuyas distancias al punto x_0 tienden a cero, los correspondientes valores de una función f(x) tienden a un número real L+, se dirá que la función tiene un límite lateral por la derecha de x_0 y escribiremos:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+$$

Si al tomar valores de *x* a la **izquierda** de x_0, cuyas distancias al punto x_0 tienden a cero, los correspondientes valores de una función *f(x)* tienden a un número real L^-, diremos que la función tiene un **límite lateral por la izquierda de** x_0 y escribiremos:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$$

Observaciones:

- Los límites laterales no existen siempre.
- Los límites laterales, si existen, pueden ser iguales o distintos.

Importante

Si los límites laterales existen y son iguales se dice que la función tiene límite *L* cuando *x* tiende a x_0 y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejercicio Valores de los límites

Ejercicio

Valores de los límites

Estudia de nuevo las gráficas anteriores. ¿Puedes decir qué valor tienen los siguientes límites?

$\lim_{x \to 2} f(x)$ = 2

$\lim_{x \to 1} g(x)$ = No existe, ya que los límites laterales no coinciden.

Ejemplo práctico

Un ejemplo del uso del cálculo de los límites laterales se da en las funciones definidas a trozos:

Considerando la función:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x<3 \\ x & x \geq 3 \end{cases}$$

Hay que calcular, si existe, el $lim_{x\to 3} f(x)$ y el $lim_{x\to 2} f(x)$

Solución:

Para calcular el primer límite, hay que hallar los **límites laterales** estudiando si son iguales.

- Por la izquierda (tomando valores más pequeños que 3):

$$\lim_{x\to 3^-} x-2=1$$

- **Por la derecha** (tomando valores **más grandes** que 3):

$$\lim_{x\to 3^+} x=3$$

Los **límites laterales existen pero son distintos**, por lo tanto decimos que no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$.

En el caso de $lim_{x\to 2} f(x)$, la **función no cambia de expresión**, por lo que:

- **Por la izquierda** (tomando valores **más pequeños** que 2):

$$\lim_{x\to 2^-} x-2=0$$

- **Por la derecha** (tomando valores **más grandes** que 2):

$$\lim_{x\to 2^+} x-2=0$$

Y, por lo tanto, $lim_{x\to 2} f(x)=0$.

Propiedades de los límites

Se presentan, a continuación, algunas propiedades de los límites que ayudarán en su cálculo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$ donde k es un número real.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_x \to x_0 f(x)}{\lim_x \to x_0 g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to x0} g(x) \neq 0$$

Ejemplo

Calcula, utilizando las propiedades, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} x^4 + 2x^3 - 3x + 1$ = $\lim_{x \to 2} x^4 + \lim_{x \to 2} 2x^3 - \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 1 =$

$= 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 16 + 16 - 6 + 1 = 25$

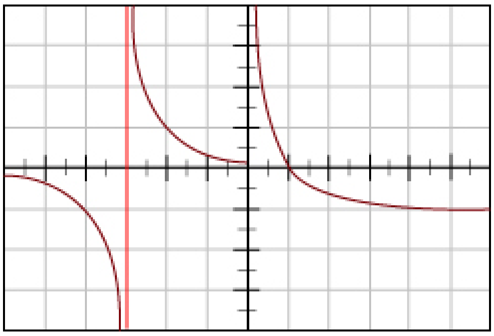
b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ = $\frac{\lim_{x \to 0} x^2 - 1}{\lim_{x \to 0} x + 2} = -\frac{1}{2}$

Límites infinitos

Es posible que al hacer una acercamiento (por la derecha o por la izquierda) a un punto dado a la función, tome valores cada vez más grandes. En ese caso se habla de **límites infinitos**.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{o también} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Un **ejemplo** de estos límites se observa en la gráfica siguiente:



Observamos que cuando *x* toma valores próximos a *-3*, la función toma valores cada vez más grandes (tiende a -∞) si nos acercamos por su derecha, y tiende a -∞si nos acercamos por la izquierda.
Si nos acercamos a *0* por la derecha, la función también tiende a -∞ .

Estos límites darán lugar a las asíntotas verticales.

Límites en el infinito

Es posible, también, que se tenga que estudiar el comportamiento de las funciones para valores grandes de *x*. Esto lleva a considerar la idea de **límites en el infinito**.

Se habla de límites de una función en el infinito si al tomar *x* suficientemente grandes la función *f(x)* tiende al número real *L*.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{2x+10}=3$$

Se observa que si se toman valores de *x* cada vez más grandes, la función toma valores que se aproximan cada vez más a *3*.

Operaciones con ∞

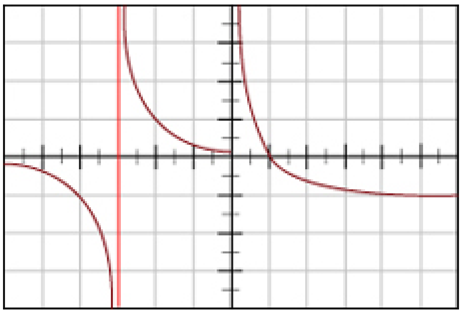
El uso del ∞ hace que se tenga que especificar el resultado de algunas operaciones en las que aparece el infinito y el cero.

$$\begin{array}{ccc} k+\infty=\infty & k-\infty=-\infty & \infty+\infty=\infty \\ \infty\cdot\infty=\infty & -\infty\cdot\infty=-\infty & \frac{\infty}{k}=\infty \text{ si } k>0 \\ \frac{k}{\infty}=0 & k^{\infty}=\infty \text{ si } k>1 & k^{\infty}=0 \text{ si } 0\leq k<1 \\ \frac{k}{0}=\infty & \frac{0}{k}=0 & \end{array}$$

Estas igualdades deben entenderse como igualdades entre límites.

Ejemplos

Para repasar los conceptos aprendidos en este tema se pueden realizar los siguientes ejemplos prácticos:



Observando la **gráfica de la función**, se puede calcular:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ = $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ = $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ = $\lim_{x \to 3} f(x) = -1$

d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ = $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1/2$

e) $\lim_{x \to 0} f(x)$ = No existe, ya que los límites laterales no coinciden.

Resumen

En este tema se ha definido el concepto de límite de una función en un punto como el valor al que tiende la función cuando se acerca todo lo posible a un punto.

Se han definido también los límites laterales (por la derecha y por la izquierda) como las aproximaciones a través de números mayores o menores al dado. Estos límites laterales pueden existir o no y ser, o no, iguales.

Se dice que existe el límite de una función en un punto cuando existen los límites laterales y son iguales. Es posible, también, definir el límite de una función en el infinito. Estos límites dan lugar a algunas expresiones en las que aparecen el *0* y el ∞.