Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

DERIVADA E INTEGRAL

ESTUDIO COMPLETO DE UNA FUNCIÓN

ÍNDICE

Presentación

En este tema estudiaremos los puntos a seguir para poder realizar la **gráfica de una función conocida** y su expresión algebraica (fórmula) mediante un estudio completo de la función.

- También se aprenderá a **interpretar la información** que proporciona una gráfica sobre una función.
- Comprobaremos la importancia de las gráficas en diferentes campos, como en la economía, la medicina, la sociología o incluso en el deporte.
- Realizaremos diversos ejemplos y ejercicios en los que trabajaremos los conceptos aprendidos.

La importancia de las gráficas

El lenguaje de las gráficas es universal. Esta forma de organizar la información se utiliza en prácticamente todos los campos profesionales: economía, sociología, medicina, biología, meteorología, etc.

La razón es bien sencilla: para comprender un gráfico no es necesario disponer de amplios conocimientos matemáticos. Por lo tanto, es un recurso muy útil al alcance de todos. Las gráficas permiten ver muchos datos de una forma global. La información que proporcionan es nítida y el observador entiende 'de un simple vistazo'. Por ello es importante desarrollar la capacidad para interpretar una gráfica y saber construirla como medio de trasmisión de cualquier tipo de información.

A partir de una gráfica se puede observar la evolución de un proceso que cambia con el tiempo (o lo que es lo mismo, de una función).

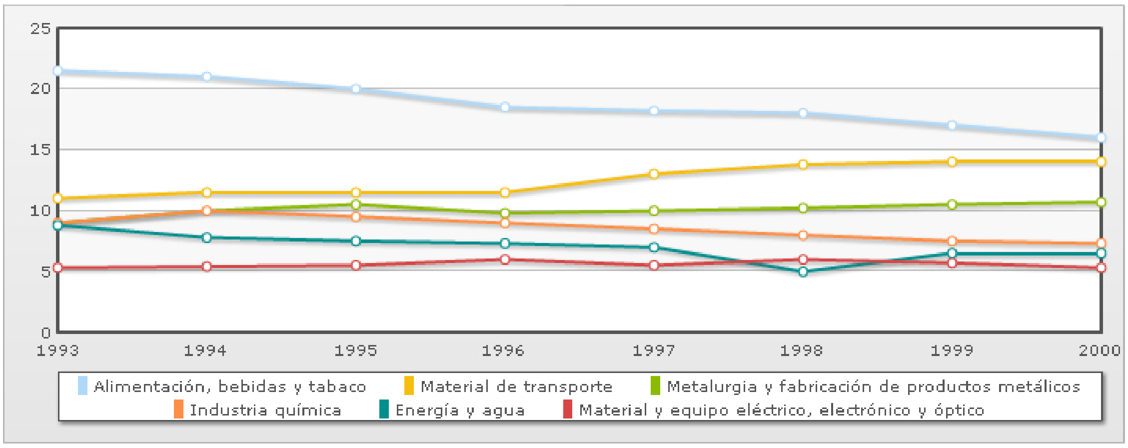
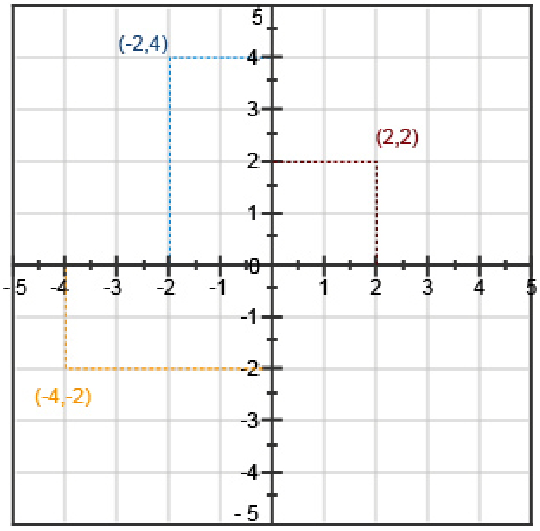


Gráfico: Boletín informativo del INE

Los ejes de coordenadas

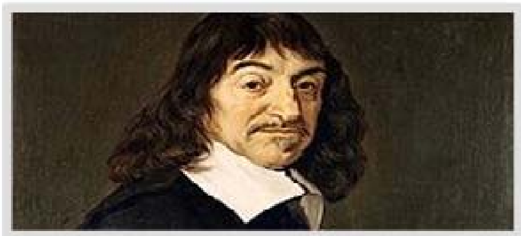


Se puede decir que los padres de la representación gráfica son **Pierre de Fermat** y **René Descartes**. Ellos desarrollaron, entre otros muchos avances de las matemáticas, y de forma separada, la llamada **geometría analítica** y demostraron que toda ecuación que relaciona dos variables determina una **curva** en el plano.

Uno de los elementos que introdujeron y que revolucionó las representaciones gráficas son las **coordenadas**. Las coordenadas cartesianas nos permiten situar cualquier punto en el plano mediante dos coordenadas respecto a un origen de las mismas. Si unimos todos los puntos de una función obtenemos la **gráfica de una función**.

- El eje horizontal se llama eje X o eje de abscisas.
- El eje vertical se llama eje Y o eje de ordenadas.
- El punto O, donde se cortan los dos ejes, es el origen de coordenadas.
- Las coordenadas de un punto cualquiera P se representan por (x, y).

Pierre de Fermat (1601 – 1665).



René Descartes (1596 – 1650).

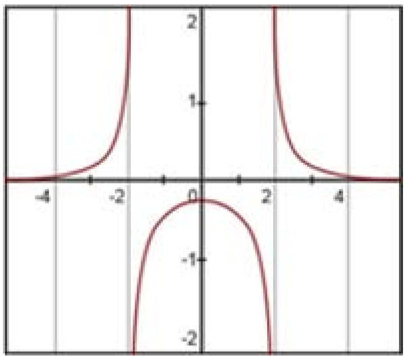
Dibujar una función

Saber dibujar correctamente la gráfica de una función permite trasmitir mucha información de una forma clara y fácil. Para ello es importante seguir una serie de pasos para no olvidar ningún dato que pudiera resultar relevante. En general, para dibujar la gráfica de una función se realizan los siguientes estudios:

- Dominio de la función
- Cortes de la función con los ejes de coordendas
- Continudidad
- Asíntotas
- Crecimiento
- Máximos y mínimos
- Curvatura
- Puntos de inflexión

También puede resultar interesante estudiar la simetría de la función y su periodicidad.

A partir de estos puntos, si se traslada convenientemente la información a la gráfica, se pueden ver de un solo vistazo todos esos datos.



Pasos a seguir para dibujar una función

Seguidamente revisamos algunas definiciones y se ordenan los pasos a tener en cuenta:

Dominio de la función	Conjunto de valores para los que está definida la función.
Cortes de la función con los ejes de coordenadas	Son los puntos en los que se cumple que o bien $x=0$ o $y=0$. Para calcularlos se sustituye el 0 en el valor de la x, obteniendo el punto $(0,f(0))$ y se iguala la función a cero, sacando el valor de x_0 y obteniendo el punto $(x_0,0)$
Continuidad	Estudiamos, especialmente, los puntos en los que la función presenta discontinuidades.
Asíntotas	Son las rectas a las que se aproxima la función cuando una de las variables tiende a ∞. Pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.
Crecimiento	Determinaremos los intervalos de crecimiento a partir del signo de la derivada de la función. La función es creciente si $f'(x)>0$ y será decreciente si $f'(x)<0$ en dicho intervalo.
Máximos y mínimos	Clasificaremos los puntos críticos (puntos en los que se anula la primera derivada) a partir de los criterios de crecimiento o mediante la segunda derivada de la función, de modo que será un máximo si $f''(c)<0$ y un mínimo si $f''(c)>0$
Curvatura	Determinaremos los intervalos de curvatura de la función a partir del signo de la segunda derivada de la función. De modo que la función será cóncava si $f''(x)<0$ y será convexa si $f''(x)>0$
Puntos de inflexión	Son los puntos que anulan la segunda derivada y en los que cambia la curvatura.

Documentos Cálculo de asíntotas

Ejemplo

Siguiendo los pasos anteriores, estúdiese la siguiente función y dibújese su gráfica.

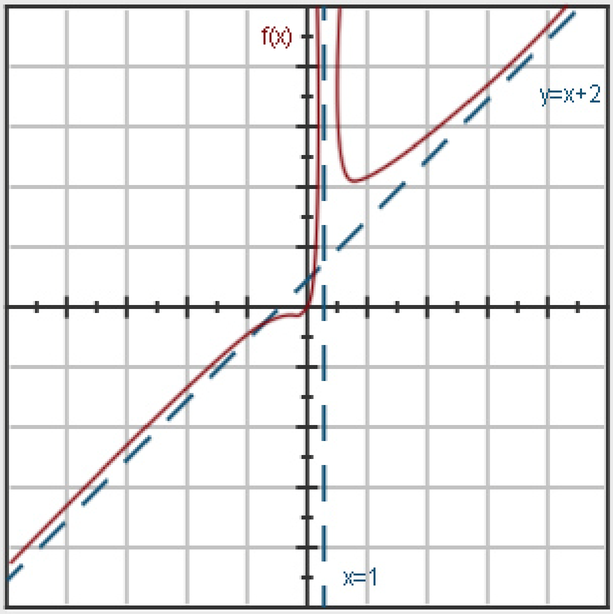
$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Dominio	*Dom f:R-{1}*
Corte con los ejes	$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \Rightarrow x=0 \\ x=0 \Rightarrow f(0)=0/1=0 \end{array}\right\}$ Corta los ejes en el *(0,0)*.
Continuidad	Por ser una función racional, es continua en todo su dominio. En *x=1*, tiene una discontinuidad de salto infinito.
Asíntotas	Asíntota vertical: en *x=1* Asíntota horizontal: no hay una asíntota horizontal Asíntota oblicua: en *y=x+2*
Crecimiento	Creciente en *(-∞,0), (0,1), (3,∞)* y decreciente en *(1,3)*
Extremos	Mínimo en *x=3*
Curvatura	Concava en *(-∞,0)*, y convexa en *(0,1), (1,∞)*
Puntos de inflexión	Punto de inflexión en *x=0*.

Gráfico [Gráfica de la función]

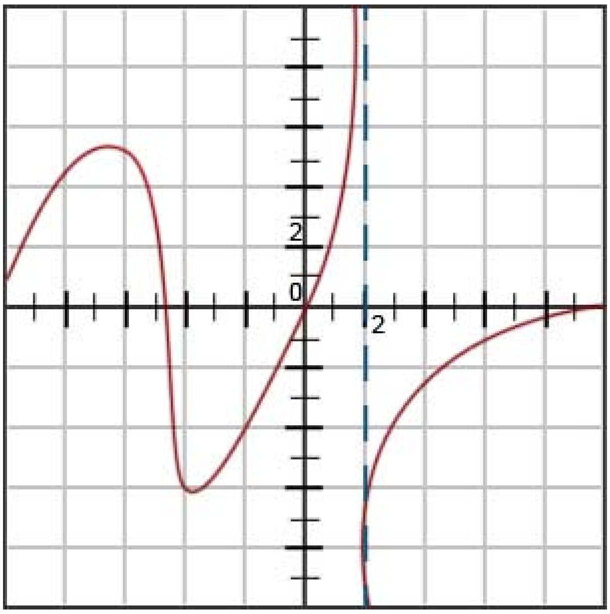
Gráfico

Gráfica de la función



Documentos [Cálculos más detallados]

Información a partir de gráficas



Interpretar la información que nos ofrecen las gráficas es muy importante.

¿Qué puedes decir de la siguiente función sobre su dominio, cortes con los ejes, continuidad, asíntotas, crecimiento, extremos, curvatura y puntos de inflexión?

Observando la gráfica podemos ver que el dominio de la función es *R-{2}*. En dicho punto existe una discontinuidad de salto infinito.

El único punto de corte con los ejes es el origen *(0,0)* y el punto *(-5,0)*.

Existe una asíntota vertical en *x=2* y una horizontal en *y=0*, de modo que:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Creciente: *(-∞,-6), (-4,2) (2,∞)*

Decreciente: *(-6,-4)*

Máximo relativo en el punto *(-6,f(-6))*. Mínimo relativo en el punto *(-4,f(-4)*)

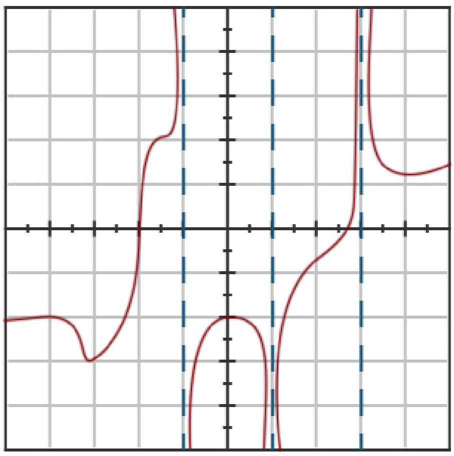
Cóncava: *(-∞,-5), (2,∞*). Convexa en *(-5,2)*

Punto de inflexión en *x=-5*

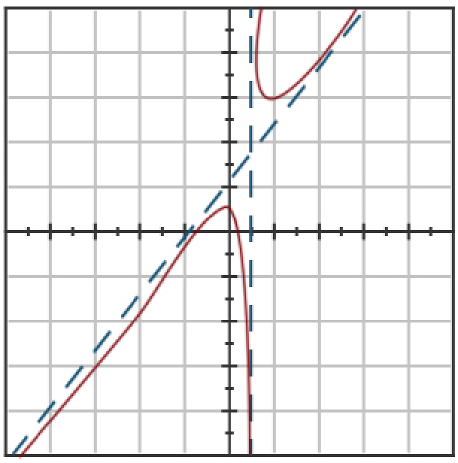
Otros ejemplos

Practíquese con las dos siguientes gráficas:

Ejemplo 1



Ejemplo 2



Ejercicio [Solución Ejemplo 1]

Ejercicio

Solución

El dominio de la función es *R-{-2,2,6}*. En dichos puntos existen discontinuidades de salto infinito.

Corte con los ejes: Eje *X: (-4,0),(5,0*). Eje *Y: (0,-2)*

Existen dos asíntotas verticales en *x=-2*, *x=2* y *x=6* y dos horizontales en *y=3*, *y=-4*, de modo que:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 6^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -4$$

Creciente: *(-6,-2), (-2,0) (2,6)*

Decreciente: *(-∞,-6),(0,2), (6,∞)*

Máximo relativo en el punto *(0,f(0))*. Mínimo relativo en el punto *(-6,f(-6))*

Cóncava: (-∞,-7) ,(-4,-3),(-2,2),(2,4). Convexa en *(-7,-4), (-3,-2)(4,6), (6,∞)*

Puntos de inflexión en *x=-7, x=-4, x=-3, x=4*

Ejercicio Solución Ejemplo 2

Titulo pop up

Solución

El dominio de la función es *R-{1}*, en dicho punto existe una discontinuidad de salto infinito.

Corte con los ejes: Eje *X: (-1.8,0)*. Eje *Y: (0,1)*

Existen dos asíntotas: una vertical en *x=1* y otra oblicua en *y=1.25x+2.5* (ecuación de la recta que pasa por los puntos *(0,2.5)* y *(-2,0))*

Creciente: *(-∞,-0.5)*, *(1.8 ,∞)*

Decreciente: *(-0.5, 1)*, *(1, 1.8)*

Máximo relativo en el punto *(-0.5,f(-0.5))*

Mínimo relativo en el punto *(1.8,f(1.8))*

Cóncava: *(-∞,1)*. Convexa en *(1,∞)*. No tiene puntos de inflexión.

Esbozo de una gráfica a partir de la información de una función

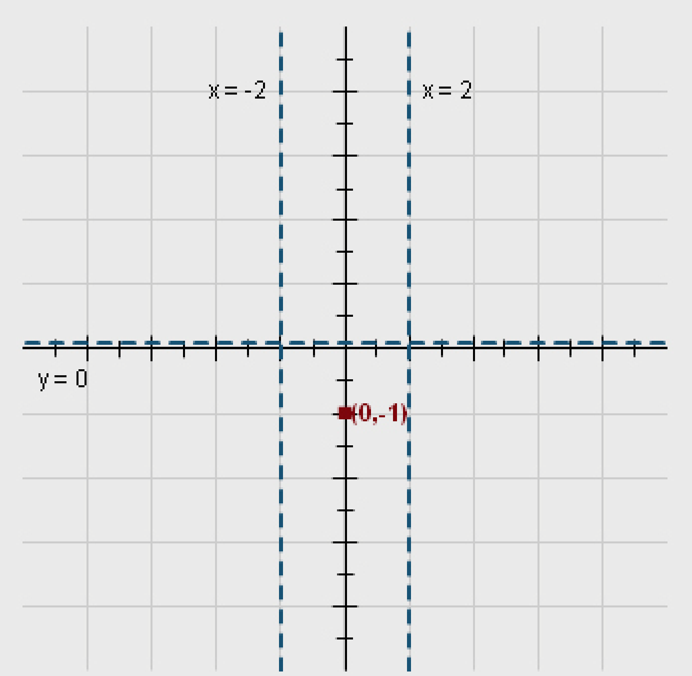
Otra forma de trazar la gráfica de una función es hacerlo a partir de información sobre la misma gráfica. Si conocemos algunos datos sobre una función, ¿podrías dibujar el esbozo de su gráfica?

- Comienza dibujando los ejes y las asíntotas verticales. Marca el punto *(0,-1)*. Fíjate en el punto e),¿qué información te da?.
- Hay una asíntota horizontal en *y=0*.

Gráfico Paso 1

Gráfico

Paso 1

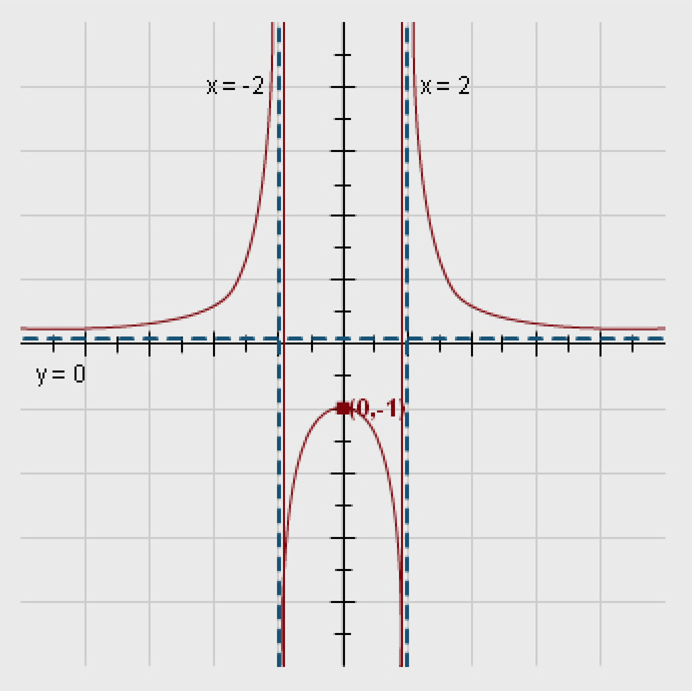


- Ahora dibuja la gráfica sin levantar el lápiz del papel (la función es continua) de forma creciente desde -? hasta el -2 y con curvatura convexa. Acuérdate que en las asíntotas hay un salto, así que dibuja ahora desde el -2 hasta el punto (0,0), creciente y cóncava, y continúa decreciendo hasta el 2. Fíjate que en el (0,0) hay un máximo ya que cambia el crecimiento.
- Repasa toda la información, ¿hay algo más que no hemos usado?.
- ¡Ya tienes la gráfica!

Gráfico [Paso 2]

Gráfico

Paso 2



Resumen

En este tema se ha estudiado la importancia de las **gráficas de las funciones**.

El lenguaje de las gráficas es fácil y directo. Por esta razón son muchos los sectores profesionales que han adoptado este sistema para transmitir información. Pero para ello es importante saber **dibujar la gráfica** de una función a partir de su ecuación general o de información sobre la misma gráfica. También se debe saber **interpretarlas** obteniendo toda la información relevante que nos proporcionan.

No hay que ovidar que los puntos que se deben seguir para poder realizar la gráfica completa de una función son:

- Dominio de la función
- Cortes de la función con los ejes de coordenadas
- Continuidad
- Asíntotas
- Crecimiento
- Máximo y mínimos
- Curvatura
- Puntos de inflexión
- Gráfica