Proyecto MaTEX

Determinantes

Fco Javier González Ortiz

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS

MaTEX

DETERMINANTES

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Tabla de Contenido

1. Introducción
2. Determinantes
   2.1. Propiedades
   2.2. Cálculo de determinantes con las propiedades
3. Determinantes de orden superior
   3.1. Adjunto de un elemento
   3.2. Desarrollo de un determinante por adjuntos
4. Aplicaciones de los determinantes
   4.1. Inversa de una matriz
      • Inversa de una matriz 2×2 • Inversa de una matriz 3×3
   4.2. Cálculo del rango de una matriz
      • Menores de una matriz • Método práctico

Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

1. Introducción

Los determinantes históricamente son previos a las matrices. Si bien su importancia en un principio fué mayor en la actualidad el concepto de matriz ha resultado más fértil.

En el capítulo de sistemas hemos aprendido a resolver sistemas por el método de Gauss. La idea de expresar las soluciones en función de los coeficientes y los términos independientes llevó a Leibnitz en el siglo XVII, a la teoría de los determinantes.

El uso de determinantes nos permitirá

- Calcular la inversa de una matriz
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones y
- Determinar el rango de una matriz.

2. Determinantes

Definición 2.1 *Sea A una matriz de orden 2, llamamos determinante de la matriz A y lo representamos como $|A|$, al número*

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

2.1. Propiedades

D1 El determinante es una función lineal de cualquiera de sus filas o columnas. Como las operaciones lineales con vectores son la suma y producto por un escalar, en realidad esta propiedad expresa dos reglas:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D1a)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\, a & \lambda\, b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D1b)$$

D2 El determinante cambia de signo cuando se intercambian dos líneas consecutivas,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c\,b - a\,d = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D2)$$

D3 El determinante de la matriz identidad es 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (D3)$$

D4 Si dos líneas paralelas de A son iguales, el determinante es nulo.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

D5 Si sumamos a una linea de A un múltiplo de otra linea paralela, el determinante no varia,

$$\begin{vmatrix} a+k\,c & b+k\,d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D5)$$

D6 Si A tiene una linea nula, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (D6)$$

D7 Si A es una matriz triangular, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a\,d \qquad (D7)$$

D8 El determinante de A y de A^T son iguales,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad (D8)$$

D9 Si una linea es múltiplo de otra linea paralela, el determinante es nulo,

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Test. Hallar $\star$ para que se cumpla $\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \star \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 4

Ejercicio 1. Expresa como sumas los determinantes

$a)$ $\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix}$

Inicio del Test A partir de $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3$, hallar :

1. El valor de $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 6 ☐ -6 ☐ 0 ☐ 2

2. El valor de $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 5

3. El valor de $\begin{vmatrix} m+p & n+q \\ \end{vmatrix}$

☐ ☐ ☐ ☐

Puntos: Correctas

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Inicio del Test A partir de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$, hallar :

1. El valor de $\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ 2 ☐ 8

2. El valor de $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ -4 ☐ -1

3. El valor de $\begin{vmatrix} a+3b & c+3d \\ b & d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ 7 ☐ 12

4. El valor de $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 1

5. El valor de $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ ☐ ☐ ☐

Puntos: Correctas

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejemplo 2.1. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

Solución: En efecto, $|A| = 1$ y $|B| = 2$, sin embargo

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A + B| = 9 \neq |A| + |B| = 3$$

□

Ejemplo 2.2. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que se verifica

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Solución: En efecto, $|A| = 1$ y $|B| = 2$, y se verifica que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A \cdot B| = 2 = |A| \cdot |B| = 2$$

□

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

2.2. Cálculo de determinantes con las propiedades

Las propiedades expuestas para determinantes de orden 2 son válidas para determinantes de orden superior. En las siguientes cuestiones y ejercicios se aplican a determinantes de orden 3.

La idea consiste en aplicar las propiedades y transformar el determinante hasta conseguir uno de forma triangular para aplicar la propiedad D7.

Ejemplo 2.3. Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

Solución: Usando las propiedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & b+c+a & c+a \\ 1 & c+a+b & a+b \end{vmatrix} = \qquad (D5)$$

$$\overset{(2)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \qquad (D1)$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejemplo 2.4. Calcular con las propiedades: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} =$

$$\overset{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

(1) Cambiamos c_2 con c_1. (2) Reducimos con $f_2 + f_1$ y $f_3 + 3\,f_1$.
(3) Factor común 2 en la f_2. (4) Reducimos con $f_3 - 3\,f_2$

□

Ejercicio 2. Indicar qué propiedad hemos aplicado en las igualdades:

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 3. Calcular los d

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

3. Determinantes de orden superior

3.1. Adjunto de un elemento

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se llama **adjunto** del elemento a_{ij}, y se denota A_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta de eliminar su fila y su columna afectado del signo $+$ o $-$ según $i+j$ sea par o impar,

$$\text{Adjunto de } a_{ij} = A_{ij}$$

Por ejemplo en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad , A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad , A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{22} = 0 \qquad A_{23} = -9 \qquad A_{31} = -4$$

siendo la matriz adjunta $Adj(A)$

$$\begin{pmatrix} -20 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

3.2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ el determinante de A, es la suma de los productos de los elementos de una linea por sus respectivos adjuntos,

$$\boxed{|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \qquad (\text{fila } i)} \tag{2}$$

Sea por ejemplo el determinante de una matriz de orden 3×3
Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollamos por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollando en primer lugar por la primera fila y en segundo lugar por la

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejemplo 3.1. Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:
Lo habitual es hacer ceros en alguna línea y después desarrollar por adjuntos. En este caso hemos elegido hacer ceros en la fila 3ª.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

(1) Reducimos con $c_2 - 3\,c_1$, $c_3 - c_1$ y $c_4 - 2\,c_1$.
(2) Desarrollamos con adjuntos por la f_3 .

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejemplo 3.2. Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Solución:
Vamos a hacer ceros en la primera columna usando como pivote el elemento $a_{11} = 1$, obteniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -7 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -19 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -19 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{-142}$$

(1) Efectuamos $f_2 - 2\,f_1$, $f_3 - 3\,f_1$ y $f_4 + f_1$.

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 4. Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 5. Calcular los siguientes determinantes:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 6. Calcular los siguientes determinantes:

$$(a)\ \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Ejercicio 7. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \end{vmatrix}$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

4. Aplicaciones de los determinantes

Teorema 4.1. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es 0,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \qquad i \neq j \tag{3}$$

4.1. Inversa de una matriz

La construcción de la inversa de una matriz A se efectúa por los adjuntos. De las ECUACIONES 2 y 3 se sigue

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}^{Adj(A)^T} = \overbrace{\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}}^{|A|\,\mathbf{I_d}}$$

Siendo $Adj(A)$ la matriz adjunta de A. Como $A \cdot Adj(A)^T = |A| \cdot I_d$, dividiendo por $|A|$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^T \tag{4}$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

- **Inversa de una matriz** 2×2

Ejemplo 4.1. Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4)(-2) = -5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$

b) Se calculan los adjuntos de los elementos de A

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = -(-4) = 4 \quad A_{21} = -(-2) = 2 \quad A_{22} = 3$$

Matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La inversa de A es:

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

- **Inversa de una matriz** 3×3

Ejemplo 4.2. Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Se calcula $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Calculamos los adjuntos:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 8. Calcula las matrices inversas de:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ *b*) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *d*) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9. Con las matrices A y B del ejercicio anterior resuelve las ecuaciones matriciales:

a) $A\,X = B$ *b*) $X\,A = B$

c) $A\,X\,B = I$ *d*) $B\,X\,A = I$

Ejercicio 10. Responder a las siguientes cuestiones

a) ¿Es cierto que toda matriz cuadrada admite inversa?

b) Si $|A| = 3$, ¿es cierto que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{3}$?

c) Sabiendo que $|A| = -\dfrac{1}{2}$ y $|B| = -\dfrac{2}{3}$, siendo A y B del mismo orden

d) Expresar $|A\,\mathrm{adj}(A\,A)|$ en función de $|A|$ para cualquier valor de n.

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 12. Es posible encontrar una matriz A regular de orden 3 tal que su adjunta $Adj(A)$ sea nula. ¿Verdadero o falso?.

4.2. Cálculo del rango de una matriz

En el capítulo de matrices ya hemos estudiado el concepto de **rango**. Los determinantes se pueden utilizar para determinar el rango de una matriz, basándonos en que el determinante de una matriz con una linea combinación lineal de otras paralelas es cero.

- **Menores de una matriz**

De una matriz A se pueden extraer submatrices cuadradas. A los determinantes de dichas submatrices los llamamos menores.
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

menores de orden 2 son por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 1$$

También podemos extraer menores de orden 3, que en este caso son todos nulos. En este caso, el rango como hicimos en el capítulo de matrices por reducción es,

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

pues es el número de filas no nulas de la matriz reducida. Este coincide con el mayor menor que se puede extraer de A, que es de orden 2. Si hay un menor no nulo, su orden indica el rango de la matriz. En este caso $r(A) = 2$. En general se tiene:

El mayor menor no nulo da el rango de la matriz

- **Método práctico**

  Resaltamos a continuación dos indicaciones para el estudio del rango:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

En el siguiente ejemplo ilustramos el cálculo del rango por menores, pero como hemos dicho antes se recomienda utilizar el método de reducción si la matriz no tiene parámetros.

Ejemplo 4.3. Utilizando el método de los menores, hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el $rg(A) \geq 2$. Se añade una fila y columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, Se prueba con la misma fila y otra columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, luego la tercera fila es combinación lineal de las filas primera

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \end{vmatrix}$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejemplo 4.4. Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Analizamos en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz y que contenga a k, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & k & -1 \end{vmatrix} = -7 - 7\,k = 0 \Longrightarrow k = -1$$

Si $\mathbf{k = -1}$, sustituyendo en A y reduciendo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim^{2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 2$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 13. Utilizando el método de los menores, hallar el rango de las matrices

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Hallar el valor de k para que el rango de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

sea 2.

Ejercicio 15. Discutir en función del parámetro el rango de:

$$\text{(a) } M \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } N \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 2 & 2 & c+1 \\ 4 & 2c+2 & c^2+3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16. Discutir en función del parámetro el rango de:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 17. Hallar las raíces del polinomio en función de a:

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 18. Hallar x para que A no tenga inversa, siendo

$$A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Hallar los valores de k para los cuales la matriz no tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20. Determinar para que valores de a tiene solución la ecuación

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 21. Resolver la ecuación matricial:

$$B(2A+I) = AXA + B$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22. Si a, b y c son no nulos, estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23. Estudiar según los valores de a, b y c el rango de la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24. Hallar a para que $r(A) = 2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 25. Hallar si es posible, un valor de a para que $r(B) = 2$ y otro para que $r(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 2\alpha \\ \alpha^2 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & \alpha+1 & 2\alpha-2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12 \quad \text{hallar} \quad \begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

Ejercicio 27. Resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Aplicando la propiedad D1a a la primera columna,

$$\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ a & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

b) Aplicando la propiedad D1a dos veces

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1+a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2a \\ a & 0 \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 2.

a) Si en un determinante una línea es múltiplo de otra paralela, el determinante es nulo. D9

b) Si en un determinante se intercambian dos líneas paralelas consecutivas, el determinante cambia de signo.

Se produce un cambio de signo por cada permutación: Propiedad D2

Contamos los cambios por columnas:

(c_1, c_2, c_3)	inicio
(c_1, c_3, c_2)	$-$
(c_3, c_1, c_2)	$+$
(c_3, c_2, c_1)	$-$

Ejercicio 2

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 3(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} =$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1. Reducimos con $f_3 - a\, f_2$ y con $f_2 - a\, f_1$.
2. Reducimos con $f_3 - b\, f_2$.

□

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 3(b) Utilizamos propiedades para que el alumno las aprenda

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{D3}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{D2}{=}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{7\,f_3 - f_2}{=} -\frac{2}{7} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 31 \end{vmatrix} = 62$$

1. Reducimos con $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 + f_1$

□

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 4. Obtenemos ceros usando la primera fila:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -48$$

(1) Reducimos con $f_2 - 4\,f_1$ y $f_3 - f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 22$$

(1) Reducimos con $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 - 3\,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -12$$

(1) Reducimos con f_2

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 5(a) Obtenemos ceros en la tercera fila usando como pivote el elemento $a_{31} = -1$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 4 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -45$$

(1) Reducimos con $c_2 + c_1$ y $c_3 + 2\,c_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.
(3) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna.

□

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 5(b) Obtenemos ceros en la segunda columna usando como pivote el elemento $a_{12} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & 17 \\ 24 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -44$$

(1) Reducimos con $f_2 - f_1$, $f_3 - 2\,f_1$ y $f_4 - 3\,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la segunda columna.
(3) Reducimos con $c_1 + 5\,c_2$ y $c_3 + 5\,c_2$.
(4) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila. □

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 6(a)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ a+4 & a+1 & 1 & 1 \\ a+4 & 1 & a+1 & 1 \\ a+4 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{D1}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^3(a+4)$$

(1) Reducimos sumando a la c_1 las restantes $c_2 + c_3 + c_4$.
(2) Reducimos restando a todas las filas la primera f_1

□

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 6(b)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \overset{(1/a)\,c_1}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

1. Reducimos con $f_4 - f_3$ y con $f_3 - f_2$.

□

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 7(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 - c_1 \\ = \\ c_4 - c_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 10 & 2 & 14 & 2 \\ 21 & 2 & 25 & 2 \end{vmatrix} \overset{D4}{=} 0$$

$\square$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 7(b)

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1+3x & x & x & x \\ -1+3x & -1 & x & x \\ -1+3x & x & -1 & x \\ -1+3x & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{D1}{=} (-1+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (-1+3x)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1+3x)\,(-1-x)^3$$

1. Reducimos sumando a la c_1 las restantes $c_2 + c_3 + c_4$.
2. Reducimos restando a todas las filas la primera f_1.

□

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Prueba del Teorema 4.1. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es 0,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0 \qquad i \neq j$$

Obsérvese que la expresión anterior equivale al desarrollo por la fila f_j del siguiente determinante, donde las filas f_i y $f_j$son iguales.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ fila\, i \\ \\ fila\, j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Esta propiedad nos permitirá construir la matriz inversa de una matriz.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 8.

$$a)\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -38 & 6 & 22 \\ 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$d)\ D^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 20 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 9.

a) $A\,X = B \Longrightarrow A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}\,B}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $X\,A = B \Longrightarrow X\,A\,A^{-1} = B\,A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B\,A^{-1}}$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $A\,X\,B = I \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}B^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}B^{-1}}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -11 \end{pmatrix}$$

d) $B\,X\,A = I \Longrightarrow B^{-1}BXAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B^{-1}A^{-1}}$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 10.

a) Falso. Ya hemos visto que es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de cero. CONDICIÓN 5

b) Verdadero pues

$$|A \cdot A^{-1}| = |I_d| = 1 = |A|\,|A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Propiedad D9

c) Como

$$\begin{cases} |A| = -\dfrac{1}{2} & \Longrightarrow \quad |A^{-1}| = -2 \\ |B| = -\dfrac{2}{3} & \Longrightarrow \quad |B^{-1}| = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

luego por la regla de Laplace

$$|A^{-1}\,B^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| = (-2)(-\frac{3}{2}) = \mathbf{3}$$

Ejercicio 10

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 11(a) Lo vemos para $n = 3$:

$$\lambda A_3 = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

De la propiedad D1b, se tiene

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

luego

$$|\lambda A_3| = \lambda^3 |A_3|$$

y para el caso n,

$$|\lambda A_n| = \lambda^n |A_n|$$

□

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 11(b) De la expresión de la inversa, se tiene que:

$$A \cdot Adj(A^T) = |A|\, I_n$$

Tomando determinantes

$$\begin{aligned}
|A \cdot Adj(A^T)| &= \Big||A|\, I_n\Big| \\
|A| \cdot |Adj(A^T)| &= \Big||A|\, I_n\Big| && \text{(Regla de Laplace)} \\
|A| \cdot |Adj(A)| &= \Big||A|\, I_n\Big| && (|A| = |A^T|) \\
|A| \cdot |Adj(A)| &= |A|^n\, |I_n| && \text{(apartado anterior)} \\
|A| \cdot |Adj(A)| &= |A|^n && (|I_n| = 1) \\
|Adj(A)| &= |A|^{n-1} && \text{(simplificando)}
\end{aligned}$$

□

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 12.

Falso, pues si $Adj(A)$ es nula todos los menores de orden 2 de A son cero. Si desarrollamos el determinante de A por adjuntos también valdrá cero, y por tanto no puede ser regular.

Ejercicio 12

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 13.

a) Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, el $rg(A) = 2$ pues no hay menores de orden 3.

b) Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el $rg(B) \geq 2$.

Por otra parte como el único menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

se tiene $rg(B) = 2$.

Ejercicio 13

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 14. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el $rg(B) \geq 2$. Para que no pueda ser 3 es necesario que su determinante sea nulo, $|C| = 0$,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = 11\,k^2 - k - 12$$

Para que $11\,k^2 - k - 12 = 0$ es necesario que $k = 12/11$ ó $k = -1$.

Ejercicio 14

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 15(a) Elegimos de $M \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

Si $a \neq -3 \Longrightarrow r(M) = 3$, y para $a = -3$ sustituimos en M y reducimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(M) = 3$$

para todo valor de a se tiene $r(M) = 3$

□

[1] $(f_2 - 2f_1)$ $(f_3 - f_1)$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 15(b) Calculamos

$$|N| = -2c(c-1)^2 = 0 \Longrightarrow c = 0 \vee 1$$

- $c = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(N) = 1$$

- $c = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(N) = 2$$

□

[1] $(f_2 - 2f_1)$ $(f_3 - 4f_1)$

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 16(a) Elegimos de P un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (b-1)(2b-1) = 0 \Longrightarrow b = 1 \vee b = 1/2$$

$$\bullet\, b \neq 1 \wedge b \neq 1/2 \Longrightarrow r(P) = 3$$

Si $\bullet\, b = 1$ sustituimos en P y reducimos la matriz, $r(P) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\bullet\, b = 1/2$ sustituimos en P y reducimos la matriz, $r(P) = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -14 & -15 & -28 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - 2f_1$, $f_3 - f_1$.
(2) $2f_1$ y $4f_2$.
(3) $f_2 - 8f_1$ y $f_3 - f_1$.

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 16(b) Elegimos de Q un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2) = 0 \Longrightarrow k = 1 \vee k = -2$$

$$\bullet\, k \neq 1 \wedge k \neq -2 \Longrightarrow r(Q) = 3$$

Si $\bullet\, k = 1$ sustituimos en Q y reducimos la matriz, $r(Q) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\bullet\, k = -2$ sustituimos en Q y reducimos la matriz, $r(Q) = 3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - f_1$, $f_3 - f_1$.
(2) $2f_2 + f_1$ y $2f_3 + f_1$.
(3) $f_3 + f_2$.

$\square$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 17.

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ x^2+3a & x^2 & a & a \\ x^2+3a & a & x^2 & a \\ x^2+3a & a & a & x^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} (x^2+3a) & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+3a)(x^2-a)^3=0$$

- Si $a>0$, las raíces son $x=\pm\sqrt{a}$.
- Si $a<0$, las raíces son $x=\pm\sqrt{-3\,a}$.
- Si $a=0$, la única raíz es $x=0$.

(1) $c_1+(c_2+c_3+c_4)$ (2) $f_2-f_1, f_3-f_1, f_4-f_1$

Ejercicio 17

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DETERMINANTES
Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 18. Para que A no tenga inversa es necesario y suficiente que $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2|x| - |x-2| = 0$$

Dependiendo de x tenemos las tres ecuaciones

$$\begin{cases} x \leq 0 & -2x + (x-2) = 0 & \Longrightarrow \boxed{\text{x=-2}} \\ 0 < x \leq 2 & 2x + (x-2) = 0 & \Longrightarrow \boxed{\text{x=2/3}} \\ 2 < x & 2x - (x-2) = 0 & \Longrightarrow x = -2 (\text{no vale}) \end{cases}$$

Ejercicio 18

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 19. Para que A no tenga inversa su determinante debe ser nulo, $|A| = 0$. Restamos a todas las filas la primera:

$$\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} \overset{f_3 - f_2}{=} -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -k^2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -k-4 & -7 \end{vmatrix} = 3\,k^2\,(k-3)$$

Para $k = 0 \vee 3$ no existe la inversa de A.

Ejercicio 19

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 20. $A^2\ X + A\ X = B \Rightarrow (A^2 + A)\ X = B$. Para que tenga solución debe existir la inversa de $A^2 + A$ y por tanto $|A^2 + A| \neq 0$. Calculamos su expresión:

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha + 2 & 2\alpha + 4 \\ \alpha + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $|A^2 + A| = 2\,\alpha^2 - 4\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 2$.
Concluimos que existe solución si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$

Ejercicio 20

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 21. En primer lugar despejamos la matriz X,

$$B(2A+I) = AXA + B \quad \Rightarrow \quad 2\,B\,A + B = AXA + B$$

$$\Rightarrow \quad 2\,B\,A = AXA \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\,A^{-1}\,B\,A\,A^{-1} = A^{-1}AXAA^{-1} \Rightarrow \quad X = 2\,A^{-1}\,B$$

Calculamos A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 22. Hallamos $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} \overset{f_2+f_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 0 & 4c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = 0$$

Luego $r(A) < 3$ para cualquier valor de a, b y c. Tomemos ahora un menor de orden 2, el más cómodo es

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 3a & 0 \end{vmatrix} = -3ab \neq 0 \text{ pues } a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

luego el rango $r(A) = 2$ para cualquier valor de a, b y c.

Ejercicio 22

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 23. Hallamos $|A|$,

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{f_3+f_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

Luego $r(A) < 3$ para cualquier valor de a, b y c. Tomemos ahora un menor de orden 2, el más cómodo es

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5(a-b) = 0 \Longrightarrow a = b$$

luego se ven dos casos

- $a = b = c \Longrightarrow r(L) = r\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & a & a \\ 2a & 2a & 2a \end{pmatrix} = 1$
- $(a \neq b) \vee (a \neq c)$ con algún menor de orden 2 no nulo, luego $r(L) = 2$.

Ejercicio 23

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 24. Todos los menores de orden 3 deben ser nulos. Elegimos uno cómodo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(2a-6) = 0 \Longrightarrow a = 3$$

Es necesario que $a = 3$. Veamos si es suficiente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & -1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 19 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego si $a = 3$, el rango $r(A) = 2$.

(1) $f_2 - f_1$, $2f_3 - f_1$ y $2f_4 - 3\,f_1$.
(2) $f_4 - f_3$.

Ejercicio 24

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 25. Si $r(B) = 3$, el menor de orden 4 debe ser nulo. Hallamos $|B| = 0$:

$$|B| = -(2\alpha - 6)(2\alpha^2 - \alpha - 15) = 0 \Longrightarrow \alpha = 3 \vee \alpha = -5/2$$

Estudiamos $a = 3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego si $\alpha = 3$, el rango $r(B) = 2$.
Estudiamos $a = -5/2$. Escogemos un menor de orden 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow r(B) = 3$$

(1) $f_2 - 2f_1$, $2f_3 + 9f_1$ y $f_4 + 8\,f_1$
(2) $f_4 - f_3$

Ejercicio 25

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 26.

$$\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} -3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} d & f & e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} -3(-12) - 6(0) = \mathbf{36}$$

(1) Propiedad $D1a$
(2) Propiedad $D1b$
(3) Propiedad $D2$ y $D4$

Ejercicio 26

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Ejercicio 27. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Por la propiedad D1b, el número buscado es $\star = 3$, pues

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Final del Test

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero

Índice alfabético

adjunto, 11

cálculo del rango, 21

determinante
- cálculo del, 9
- definición, 3
- desarrollo por adjuntos, 12
- propiedades, 4, 5

inversa de una matriz, 16–18

matriz adjunta, 11
menor, 20

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNI
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente docu
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico,
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero