1. Sea $X = Z^+$ el conjunto de todos los números enteros positivos y sea T la topología definida en X mediante

$$T = \{ X, \varnothing \} \cup \{ E_n \mid n \in Z^+ \},$$

siendo, para cada $n \in Z^+$,

$$E_n = \{ m \in Z^+ \mid m \geq n \} = \{ n, n+1, n+2, n+3, \ldots \}.$$

Sea $\{ x_n \}_{n \in Z^+}$ una sucesión arbitraria de elementos de X.

Estudiar *la convergencia*, en (X, T), *de la sucesión* $\{ x_n \}_{n \in Z^+}$, en cada uno de los dos casos posibles:

A) Existe al menos un término de la sucesión que se repite infinitas veces.

B) No existe ningún término de la sucesión que se repita infinitas veces.

Justifique sus respuestas.

2. En el conjunto R de los números reales se considera la topología T' cuya base es

$$B' = \{ (a, b] \mid a, b \in R, a < b \}.$$

Sea f la aplicación del conjunto R en el espacio topológico (R, T') definida, para cada $x \in R$, mediante

$$f(x) = | x | \ (= \text{valor absoluto de } x),$$

y sea T la topología de R inicial para la aplicación $f : R \to (R, T')$.

Estudiar si el espacio topológico (R, T) es *compacto*.

Justifique sus respuestas.

3. Sea X el intervalo de R definido mediante

$$X = [0, 1) = \{ x \in R \mid 0 \leq x < 1 \},$$

y sea T la topología en el conjunto X definida mediante

$$T = \{ X, \varnothing \} \bigcup \{ \{ 0 \} \cup (\tfrac{1}{2}, a) \mid a \in (\tfrac{1}{2}, 1] \}.$$

Estudiar si el espacio topológico (X, T) es *conexo*.

Justifique sus respuestas.