

1. En  $(\mathbb{R}^3, T_u^3)$ , se considera el subconjunto

$$X = \{ (x, y, x^2 + y^2) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1 \}.$$

Estudiar si el espacio topológico  $(X, (T_u^3)_X)$  es *contractible*.

*Justifique sus respuestas.*

2. Un grupo abeliano  $G$  está determinado por el conjunto de generadores  $\{ a, b \}$  y por el sistema completo de relaciones

$$2a + 5b = 0,$$

$$5a - 3b = 0.$$

Se pide:

a) Determinar el *número de Betti* y los *coeficientes de torsión* de  $G$ .

b) Estudiar si  $G$  es un *grupo abeliano libre*.

c) Determinar el *subgrupo de torsión* de  $G$ .

d) Estudiar si  $G$  es un *conjunto finito*.

e) Determinar *todos los subgrupos* de  $G$ .

*Justifique sus respuestas.*

3. En  $(\mathbb{R}^2, T_u^2)$ , sean

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 2)^2 + y^2 = 1 \},$$

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \},$$

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1 \},$$

$$X = C \cup D \cup E.$$

a) *Triangular*  $X$ , es decir, obtener un complejo simplicial geométrico orientado  $K$  tal que

$(X, (T_u^2)_X)$  sea *homeomorfo* al poliedro geométrico  $(|K|, (T_u^2)|K|)$ .

b) *Determinar los grupos de homología simplicial*  $H_1(K)$  y  $H_2(K)$ .

c) *Estudiar si el espacio topológico*  $(X, (T_u^2)_X)$  es *contractible*.

*Justifique sus respuestas.*

*Nota 1: Cada problema se calificará sobre 10 puntos y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.*

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70