E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sean los puntos $p_0 = (0,1)$, $p_1 = (1,2)$, $p_2 = (-1,1)$ en una referencia afín. Determine las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ de un punto (x, y) respecto a esta referencia.

   Solución: Los vectores p_0p_1 y p_0p_2 son

   $$p_0p_1 = (1,1)\,, \quad p_0p_2 = (-1,0)\,.$$

   Son una base de $\mathbb{R}^2$. Las coordenadas baricéntricas de un punto (x, y) son

   $$\begin{aligned}(x,y) &= \lambda_0(0,1) + \lambda_1(1,2) + \lambda_2(-1,1),\\ 1 &= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2.\end{aligned}$$

   Entonces

   $$\begin{aligned}(x,y) &= \lambda_0(0,1) + \lambda_1(1,2) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)(-1,1)\\ &= (\lambda_0 + 2\lambda_1 - 1, \lambda_1 + 1)\,.\end{aligned}$$

   Por eso:

   $$\left.\begin{aligned} x &= \lambda_0 + 2\lambda_1 - 1,\\ y &= \lambda_1 + 1,\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned}\lambda_1 &= y - 1,\\ \lambda_0 &= x - 2\lambda_1 + 1 = x - 2y - 1.\end{aligned}\right\}$$

   Estas son las coordenadas baricéntricas.

2. (1 PUNTO) Defina envolvente de una familia de curvas planas.

   Solución: Una curva es envolvente de una familia de curvas cuando en cada punto es tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas (o en cada punto es tangente a alguna curva de la familia de tal forma que cada curva de la familia es tangente a la envolvente)

3. (1 PUNTO) Sea C la hélice dada, para las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, por la ecuación

   $$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)\,.$$

   Se pide determinar el vector tangente unitario a esta curva en un punto genérico $\mathbf{x}(t_0)$.

Solución: Tenemos que calcular

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\text{sen}\, t, a\cot s, b).$$

Su módulo es

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-a\text{sen}\, t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

y entonces

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\text{sen}\, t, a\cos t, b).$$

4. (1 PUNTO) Determine la torsión de la siguiente curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (t, 2t^2, t^2)$.

Solución: Como no está parametrizada por el arco, utilizamos

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Tenemos

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 4t, 2t), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, 4, 2), \; x'''(t) = (0, 0, 0).$$

Por eso, y el vector normal principal es

$$\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)) = 0$$

y la curva a a ser plana.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Calcúlese la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,5)$.

Solución: El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (-1,2), \; \mathbf{b}_1 = (0,1), \; \mathbf{b}_2 = (1,1), \; \mathbf{b}_3 = (1,-1), \; \mathbf{b}_4 = (2,5).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

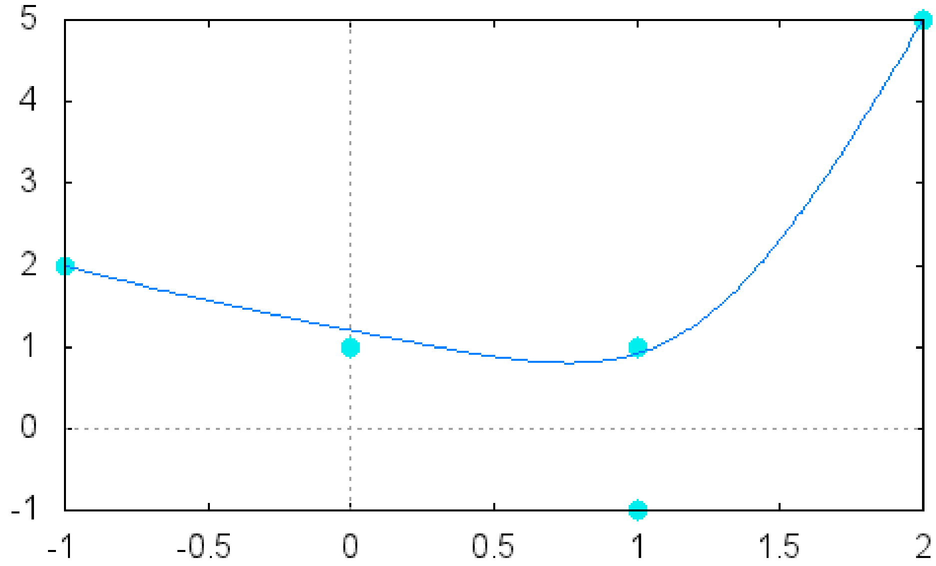
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \; B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (-1,2)B_0^4(t) + (0,1)B_1^4(t) + (1,1)B_2^4(t) + (1,-1)B_4^4(t) + (2,5)B_4^4(t) \\
&= (-1,2)\binom{4}{0} t^0(1-t)^4 + (0,1)\binom{4}{1} t^1(1-t)^3 + (1,1)\binom{4}{2} t^2(1-t)^2 \\
&+ (1,-1)\binom{4}{3} t^3(1-t)^1 + (2,5)\binom{4}{4} t^4(1-t)^0 \\
&= (-1,2)(1-t)^4 + (0,1)4t^1(1-t)^3 + (1,1)6t^2(1-t)^2 + (1,-1)4t^3(1-t)^1 + (2,5)t^4 \\
&= \left(-1 + 4t - 4t^3 + 3t^4, 2 - 4t + 6t^2 - 12t^3 + 13t^4\right).
\end{aligned}$$



La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es

6. (3 PUNTOS) Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u)$$

para $u > 0, 0 < v < \pi$. Sea $P = \mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Se pide:

(a) Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental I_P de S en P.

(b) Determinar el vector normal a la superficie en un punto $\mathbf{x}(u,v)$.

(c) Determinar la ecuación del plano tangente en $\mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

(a) En un punto $\mathbf{x}(u,v)$ se tiene

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, 1), \ \mathbf{x}_v = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0).$$

Particularizando en $\mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\mathbf{x}_u\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (0,1,1), \ \mathbf{x}_v\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (-1,0,0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (0,1,1)\cdot(0,1,1) = 2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (0,1,1)\cdot(-1,0,0) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (-1,0,0)\cdot(-1,0,0) = 1. \end{aligned}$$

Ya tenemos los coeficientes que nos permiten determinar la primera forma fundamental. Si $\mathbf{w} = (h, k)$ es un vector del plano tangente a S en P, expresado en la base $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$, entonces

$$I_P(\mathbf{w}) = Eh^2 + 2Fhk + Gk^2 = 2h^2 + 2 \cdot 0 \cdot hk + k^2 = 2h^2 + k^2.$$

(b) El vector normal es

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \\
&= \frac{(\cos v, \operatorname{sen} v, 1) \times (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)}{\|(\cos v, \operatorname{sen} v, 1) \times (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)\|} \\
&= \frac{(-u\cos v, -u\operatorname{sen} v, (\cos^2 v)\, u + (\operatorname{sen}^2 v)\, u)}{\|(-u\cos v, -u\operatorname{sen} v, (\cos^2 v)\, u + (\operatorname{sen}^2 v)\, u)\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}u}(-u\cos v, -u\operatorname{sen} v, u).
\end{aligned}$$

(c) El plano tangente a la superficie por $\mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ contiene a los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$. Por tanto, es perpendicular a $\mathbf{N}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Además, contiene a $P = (0, 0, 1) = \mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Como

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1}\left(-1\cos\frac{\pi}{2}, -1\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1),
\end{aligned}$$

su ecuación es

$$\begin{aligned}
0 &= \left((x, y, z) - \mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \mathbf{N}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = ((x, y, z) - (0, 0, 1)) \cdot (0, -1, 1) \\
&= z - 1.
\end{aligned}$$

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) ¿Cuál es la clausura convexa de un conjunto de puntos $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$?

   Solución: Dado un conjunto de puntos$\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, su clausura convexa es el conjunto de combinaciones baricéntricas de esos puntos de modo que las coordenadas baricéntricas (también llamadas pesos), además de sumar 1, son no negativas. Es decir, son los puntos $\mathbf{p}$ tales que

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i p_i : \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, 3.$$

2. (1 PUNTO) Estudíese si las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \cos^3 t + \operatorname{sen} t + 3.$$

   definen una curva regular.

   Solución: Sí la definen, porque para que sea una curva regular debe cumplirse que la función sea diferenciable (que lo es, porque sus componentes son continuas y tienen derivadas continuas hasta cualqueir orden) y que no tenga puntos singulares.

   Será regular si

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0).$$

   Como

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 2t = 0, \\ y'(t) = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t + \cos t = 0, \end{array}\right\}$$

   de la primera ecuación se deduce que $t = 0$, pero $y'(0) = 1$. Como no se anulan las dos a la vez, la función es regular.

3. (1 PUNTO) Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2 - v^2, u^2 + v^2, u\right)$$

   para $(u,v) \in (-2,2) \times (-2,2)$. Determine el plano tangente a S en $\mathbf{x}(0,1)$.

Solución: Hacemos:

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (2u, 2u, 1), \mathbf{x}_v(u,v) = (-2v, 2v, 0).$$

Particularizamos en $\mathbf{x}(0,1) = (-1,1,0)$:

$$\mathbf{r}_u(0,1) = (0,0,1), \mathbf{r}_v\left(\frac{\pi}{4},\pi\right) = (-1,1,0).$$

Entonces, la dirección normal está dada por

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,0).$$

El plano tangente tiene por ecuación

$$\begin{aligned}((x,y,z) - \mathbf{x}(0,1)) \cdot (-1,-1,0) = 0 &\iff (x+1, y-1, z) \cdot (-1,-1,0) = 0 \\ &\iff x+1+y-1 = 0 \iff x+y = 0.\end{aligned}$$

4. (1 PUNTO) Estudie si la parametrización

$$x = u+v, \qquad y = u + u\cos v, \qquad z = u^2 + v^2$$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Solución: Si $\mathbf{x}(u,v) = (u+v, u+u\cos v, u^2+v^2)$, entonces

$$rg\begin{pmatrix} D_1r_1(u,v) & D_1r_2(u,v) & D_1r_3(u,v) \\ D_2r_1(u,v) & D_2r_2(u,v) & D_2r_3(u,v) \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1+\cos v & 2u \\ 1 & -u\operatorname{sen} v & 2v \end{pmatrix}.$$

Si $u \neq v$, entonces el rango es 2. Pero si $u = v$, entonces el rango es 2 si y sólo si:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1+\cos u \\ 1 & -u\operatorname{sen} u \end{vmatrix} &= -\cos u - u\operatorname{sen} u - 1 \neq 0 \\ &\iff 1 \neq -\cos u - u\operatorname{sen} u.\end{aligned}$$

Observamos que, por ejemplo, si $u = -\pi$ o $u = \pi$, entonces este determinante es 1. Por eso, la parametrización no es regular en $\mathbb{R}^2$.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS)Dada la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$F(x,y,z,t) = \left(y^2 + t^4 - 2xz, y^3 + t^3 + x^3 - 1\right)$$

consideramos el punto $P = (1,-1,1,1)$.

(a) Demostrar que $F(x,y,z,t) = 0$ define a $z = g_1(x,y)$ y $t = g_2(x,y)$ como funciones diferenciables de x e y en un entorno del punto $(1,-1)$.

(b) Evaluar en el punto $(1,-1)$ la diferencial de la función

$$g(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))$$

(c) Calcular $\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(1,-1)$ y $\dfrac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(1,-1)$

Solución:

(a) Vemos que efectivamente se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita

- $F(1,-1,1,1)=(0,0)$
- F es diferenciable con continuidad en $\mathbb{R}^4$
- $\begin{vmatrix} D_3 f_1(P) & D_4 f_1(P) \\ D_3 f_2(P) & D_4 f_2(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Luego existe V entorno de $(1,-1)$ y $g: V \to \mathbb{R}^2$ tales que

- g es diferenciable con continuidad
- $g(1,-1)=(1,1)$
- $F(x,y,g(x,y))=0$ para todo $(x,y)\in V$

(b) Por el teorema de la función implícita

$$\begin{aligned}
g'(1,-1) &= \begin{pmatrix} D_1 g_1(1,-1) & D_2 g_1(1,-1) \\ D_1 g_2(1,-1) & D_2 g_2(1,-1) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} D_3 f_1(P) & D_4 f_1(P) \\ D_3 f_2(P) & D_4 f_2(P) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 f_1(P) & D_2 f_1(P) \\ D_1 f_2(P) & D_2 f_2(P) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
D_1 g_1(1,-1) &= D_2 g_1(1,-1) = -3 \\
D_1 g_2(1,-1) &= D_2 g_2(1,-1) = -1
\end{aligned}$$

Este apartado también se puede resolver por medio de la derivación implícita, tal como se hace en el siguiente apartado.

(c) Derivando respecto a x en las condiciones

$$\begin{aligned}
y^2 + g_2^4(x,y) - 2x g_1(x,y) &= 0 \\
y^3 + g_2^3(x,y) + x^3 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

se obtiene

$$-2g_1(x,y) - 2xD_1g_1(x,y) + 4g_2^3(x,y)\,D_1g_2(x,y) = 0$$
$$3g_2^2(x,y)\,D_1g_2(x,y) + 3x^2 = 0$$

Volviendo a derivar, resulta

$$-4D_1g_1(x,y) - 2xD_{11}g_1(x,y) + 12g_2^2(x,y)\,D_1^2g_2(x,y) + 4g_2^3(x,y)\,D_{11}g_2(x,y) = 0$$
$$6g_2(x,y)\,D_1^2g_2(x,y) + 3g_2^2(x,y)\,D_{11}g_2(x,y) + 6x^2 = 0$$

Hacemos $x = 1, y = -1, D_1g_1(1,-1) = -3, D_1g_2(1,-1) = -1$ y obtenemos

$$24 - 2D_{11}g_1(1,-1) + 4D_{11}g_2(x,y) = 0$$
$$3D_{11}g_2(x,y) + 12 = 0$$

por lo que es

$$D_{11}g_1(1,-1) = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(1,-1) = 4$$
$$D_{11}g_2(1,-1) = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(1,-1) = -4$$

6. (3 PUNTOS) Las ecuaciones paramétricas, para $r > 0$,

$$\mathbf{x}(t) = (rt - r\operatorname{sen} t, r - r\cos t).$$

corresponden a una cicloide, para $t \in R$. Se pide:

(a) Determinar la longitud de arco de la cicloide para un ciclo completo (para $t \in [0, 2\pi]$).

(b) Parametrízar la cicloide por la longitud de arco , para $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. La cicloide está dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (rt - r\operatorname{sen} t, r - r\cos t).$$

(a) Sabemos que es una curva regular si $t \neq 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y que

$$\mathbf{x}'(t) = (r - r\cos t, r\operatorname{sen} t) = (r(1-\cos t), r\operatorname{sen} t),$$
$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\operatorname{sen}^2 t} = r\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \operatorname{sen}^2 t}$$
$$= r\sqrt{2 - 2\cos t} = r\sqrt{2(1-\cos t)} = r\sqrt{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = 2r\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|,$$

porque

$$\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{t}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \implies 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} = 1 - \cos t.$$

Su longitud de arco, para $t \in [0, 2\pi]$ está dada por

$$L(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} 2r\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt = 2\int_0^{\pi} 2r\operatorname{sen}\frac{t}{2}dt$$
$$= 8r\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8r\left(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right) = 8r(0+1) = 8r.$$

(b) Para parametrizar por la longitud de arco, hacemos

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t r\sqrt{2-2\cos t}\,dt = r\int_0^t 2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt = 4r\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^t \\
&= 4r\left(-\cos\frac{t}{2}-(-\cos 0)\right) = 4r\left(1-\cos\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
t = \arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)
$$

y la curva está parametrizada por el arco si hacemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \left(r\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - r\operatorname{sen}\,\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right), r - r\cos\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right)\right) \\
&= \left(r\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - r\sqrt{1-\left(-1+\frac{1}{4}\frac{s}{r}\right)^2}, -\frac{s}{4}\right) \\
&= \left(r\arccos\left(1-\frac{s}{4r}\right) - \frac{1}{4r}\sqrt{8rs+s^2}, -\frac{s}{4}\right).
\end{aligned}
$$