

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

### PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean los puntos  $\mathbf{p}_0 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{p}_1 = (1, -1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (2, 1)$ . ¿Son una referencia afín? En caso de que lo sean, determine las coordenadas baricéntricas  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  del punto  $(-1, 3)$  respecto a esta referencia.

**Solución:**

2. (1 punto) Sea  $\mathbf{v} = (1, -1, -1) \times (2, -1, 0)$ , es decir, es el producto vectorial de  $(1, -1, -1)$  y  $(2, -1, 0)$ . Determine  $\mathbf{v}$ . ¿Es perpendicular al vector  $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$ ?

**Solución:**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Solución:

4. (1 punto) Escriba la ecuación de una curva  $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que sea regular, y con  $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$  y cuya velocidad no sea un vector constante. Compruebe que es así.

**Nota:** Muchas curvas polinómicas, con al menos una componente de grado 2, lo cumplen.

## Solución:

## EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea  $C$  la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + 2t - 1, t^2 + 1).$$

- Estudie si es una curva regular y si tiene puntos múltiples.
- Determine la función curvatura y el radio de curvatura en  $\mathbf{x}(t)$ .
- Determine el centro de curvatura en  $\mathbf{x}(0)$ . Escriba la ecuación de la circunferencia osculadora en  $\mathbf{x}(0)$ .

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Compruebe que la parametrización es regular y determine el área de la región delimitada

## Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

## Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white shadow effect, and a blue arrow-like shape points upwards from behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70