



**E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2017. Modelo A**

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = (|x| + y, e^{xy}).$$

Estudie si la función f tiene derivadas parciales en el punto $(0, 0)$ y determínelas en caso de que existan.

Solución: Tenemos que f tiene dos componentes y podemos escribir

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

donde cada $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que determinar todas las derivadas parciales $D_j f_i$ para $i, j = 1, 2$. Como el valor absoluto no es derivable, para f_1 tenemos

$$D_1 f_1(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(t, 0) - f_1(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| - 0}{t},$$

$$D_2 f_1(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(0, t) - f_1(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t} = 1.$$

La primera de estas derivadas parciales no existe.

Para f_2 tenemos:

$$D_1 f_2(x, y) = ye^{xy}, \quad D_1 f_2(0, 0) = 0,$$

$$D_2 f_2(x, y) = xe^{xy}, \quad D_2 f_2(0, 0) = 0.$$

2. Sea la curva definida por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, e^{tt^2})$$

si $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Estudie en qué puntos es regular.

Solución. No es regular en todos los puntos, porque su derivada es:

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, e^{tt^2} + 2te^t).$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, e^{tt^2}) \Rightarrow \mathbf{x}(t) = (\cos t, e^{tt^2})$$



3. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio r , definida por la ecuación, para $t \in [0, \pi]$, por

$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, \pi/3)$.

Solución: Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-r \sin t, r \cos t),$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

Entonces

$$L = \int_0^{t_0} \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^{t_0} r dt = rt|_0^{t_0} = rt_0.$$

4. (1 punto) Sea, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a,b]}$$

una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas, donde para cada λ tenemos una curva regular. Defina su envolvente.

Solución: página 23 de los apuntes del tema 2. Es una curva que es en cada punto tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$.

- Escribese su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0, 1]$.
- Determine el triedro de Frenet de esta curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.
- Determine la ecuación del plano rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$

Nota: cada apartado puntúa 1 punto.

Solución:

- El polígono de control es

$$\mathbf{b}_0 = (0, 1, 1), \mathbf{b}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{b}_2 = (0, -1, 0).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

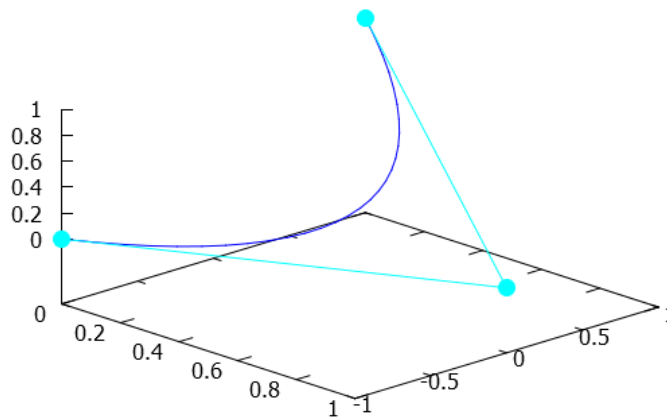
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{b}_i B_i^2(t),$$

para los polinomios de Bernstein

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$= (2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2).$$



y se ha hecho con la sentencia

```
wxdraw3d(parametric(2*t*(1-t), -t^2+(1-t)^2, (1-t)^2, t, 0, 1), point_type=filled_circle,
point_size=2, color=cyan, points([0,1,1], [1,0,0], [0,-1,0]), view=[74,32]);
```

b) Para esta curva, $\mathbf{x}(t) = (2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2)$ y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2)$$

$$\mathbf{x}'(t) = (-4t + 2, -2t, 2t - 2),$$

$$\mathbf{x}''(t) = (-4, 0, 2),$$

$$\mathbf{x}'(0) = (2, -2, -2), \quad \mathbf{x}''(0) = (-4, 0, 2),$$

$$\|\mathbf{x}'(0)\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4, 4, 8),$$

$$\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}.$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((-4, 4, 8) \times (2, -2, -2)) \\ &= (-4, 4, -8) \times (2, -2, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, -1) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -1, 0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, -1) \times (-1, -1, 0) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (-1, 1, -23). \end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -1, 0), \frac{1}{3\sqrt{2}} (-1, 1, -23) \right\}.$$

- c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 1)$ y es perpendicular al vector normal. Es decir, los puntos (x, y, z) verifican

$$\begin{aligned} 0 &= ((x, y, z) - (0, 1, 1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, -1) \iff \\ 0 &= (x, y - 1, z - 1) \cdot (1, -1, -1) \iff x - y - z + 2 = 0. \end{aligned}$$

6. Sea S la parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 parametrizada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$.

- Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.
- Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
- Determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0 = 0, \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
- A partir del valor anterior, razone y deduzca cuál es el área de la esfera.

Solución.

- a) Como

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi).$$

tenemos:

$$\mathbf{x}_\theta(\theta, \phi) = (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0),$$

$$\mathbf{x}_\phi(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi).$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, 0), \quad \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\sin \theta \cos \phi, \cos \theta \cos \phi, 0),$$

$$\mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos \theta \cos \phi, -\sin \theta \cos \phi, -\cos \phi)$$

Tenemos que calcular el vector normal \mathbf{n} . El vector

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta \operatorname{sen} \phi, 0) \times (\cos \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \cos \phi, -\operatorname{sen} \phi) \\ &= (-\cos \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\cos \phi \operatorname{sen} \phi),\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\| &= \sqrt{(-\cos \theta \operatorname{sen}^2 \phi)^2 + (-\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \phi)^2 + (-\cos \phi \operatorname{sen} \phi)^2} \\ &= \operatorname{sen} \phi.\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} = \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} (-\cos \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\cos \phi \operatorname{sen} \phi) \\ &= (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi).\end{aligned}$$

Ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \cdot (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, 0) \\ &= \operatorname{sen}^2 \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \cdot (-\operatorname{sen} \theta \cos \phi, \cos \theta \cos \phi, 0) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \cdot (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

c) Para determinar el área, calculamos primero:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi} = \operatorname{sen} \phi,$$

Entonces, el área es:

$$\begin{aligned}A &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{EG - F^2} d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0\right) d\theta \\ &= 1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$= 2 \theta \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Cartagena99



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2017. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - y^5 - 1$. ¿Se puede expresar la variable x en función de y ?

Solución: Si consideramos la ecuación

$$f(x, y) = x^3 - y^5 - 1 = 0,$$

vemos que a variable x se puede expresar en función de la variable y como

$$x = \sqrt[3]{1 + y^5}.$$

Se puede hacer esto, porque el radicando siempre es mayor que 0.

2. (1 punto) Calcule el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2, 3t^2 - 1)$ con el vector $(0, 1, -1)$.
3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, \cos t, t^4 - 2t^2 + 2).$$

Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

4. **Solución:** La curva no es regular en $(0, 0, 0)$ y además $\mathbf{x}(0) \neq (0, 0, 0)$.
5. (1 punto) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas en el espacio.

EJERCICIOS

6. (3 puntos) Sea la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, v)$$

- a) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
 b) Clasifique sus puntos.

Solución: hay que hacerla, he cambiado la superficie!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

- a) **Solución.** La aplicación $\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$ es una parametrización de la superficie en un entorno de cada uno de sus puntos en $D \subset \mathbb{R}^2$. Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (2u, 2u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-2v, 2v, 1).\end{aligned}$$

Los coeficientes e, f y g de la segunda forma fundamental se determinan a partir del vector normal unitario \mathbf{n} y las derivadas segundas de \mathbf{x} . Empezamos con el vector normal normal unitario \mathbf{n} . Sabemos que el vector

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 2u & 3u \\ -2v & 2v & 1 \end{vmatrix} = (2u, -2u, 8uv) = 2u(1, -1, 4v)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Entonces: .

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(-2v)^2 (1^2 + 1^2 + (-4u)^2)} = 2v\sqrt{2 + 16u^2}, \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{-2v(1, 1, -4u)}{2v\sqrt{2 + 16u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2 + 16u^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2 + 16u^2}}, 4\frac{u}{\sqrt{2 + 16u^2}} \right).\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \cdot (2, 2, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-2 - 2) = -\frac{4}{\sqrt{2 + 16u^2}}, \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \cdot (0, 0, 0) = 0,\end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Como $e \neq 0$ pero $eg - f^2 = 0$, todos los puntos son parabólicos, por lo que es parabólico.

