

**COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL**  
**Febrero. Modelo B**

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

**PREGUNTAS CORTAS**

1. (1 punto) Se tiene la función  $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 - y^4 + 2$ . ¿Se puede expresar una de las variables en función de la otra?

**Solución:**

2. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva  $\alpha(t) = (t, t^3, t^2)$  con el vector  $(1, 0, -1)$ . Con determinar su coseno es suficiente.

**Solución:**

3. (1 punto) Determine si la curva dada por

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. (1 punto) ¿Cuál es la expresión de una superficie de Bézier dada por la malla de control  $\{\mathbf{b}_{ij}\}$ ?

**Solución:**

## EJERCICIOS

5. Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 - t, t^2 + t).$$

- a) (1 punto) Escribese como una curva de Bézier considerando  $t \in [0, 1]$ .
- b) (1 punto) Estudie si es una curva regular para  $t \in \mathbb{R}$ . Estudie si tiene puntos múltiples para  $t \in \mathbb{R}$  y determínelos, en caso de que los tenga.
- c) (1 punto) Determine la recta tangente y la recta normal en un punto genérico  $\mathbf{x}(t)$ .
6. Sea  $S$  la superficie  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - u^4 + v^6)$  donde  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  y sea  $C$  la curva dada por  $\mathbf{x}(t) = (t, 0, t^2 - t^4)$ .
- a) (0.75 puntos) Determine el vector normal a la superficie en un punto genérico  $\mathbf{x}(u, v)$ .
- b) (0.75 puntos) Determine una base del plano tangente y de la recta normal a  $S$  en  $\mathbf{x}(0, 0)$ .
- c) (0.75 puntos) Determine el vector curvatura en  $\mathbf{x}(0, 0) \in C$ .
- d) (0.75 puntos) Determine los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en  $\mathbf{x}(0, 0)$  para la curva  $C$ .

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the "Cartagena" part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

## Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE) (du)^2 + (eG - gE) dudv + (fG - gF) (dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70