

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea f la función dada por

$$f(x, y) = (x^2 \cos y, e^{y^3}).$$

Determine su matriz jacobiana. ¿Es diferenciable la función f ?

Solución:

2. (1 punto) Sea C la curva dada por la representación paramétrica (I, \mathbf{x}) , $I = (0, 10)$,

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, -t).$$

Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

Solución:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and white geometric shape that resembles a stylized 'C' or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. (1 punto) Estudie cuándo es regular la parametrización de la superficie S dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2, u - v^2, u^2 - v^2)$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la curva de ecuaciones $\mathbf{x}(t) = (x, y, z)$ donde:

$$x = t^2, y = t^3 - 1, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Determine la curvatura y la torsión en el punto $\mathbf{x}(0)$.

b) (1 punto) Determine el triedro de Frenet en el punto $\mathbf{x}(0)$.

c) (1 punto) Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$.

6. Tenemos la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para la latitud $\theta \in [0, 2\pi]$ y la longitud $\phi \in [0, \pi]$.

a) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto genérico de la esfera $\mathbf{x}(\theta, \phi)$.

b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico de la esfera $\mathbf{x}(\theta, \phi)$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70