

**COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL**  
**Septiembre. Modelo A**

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

**PREGUNTAS CORTAS**

1. (1 punto) Sea  $f$  la función dada por

$$f(x, y) = (x^2 \cos y, e^{y^3}).$$

Determine su matriz jacobiana. ¿Es diferenciable la función  $f$ ?

**Solución:**

2. (1 punto) Sea  $C$  la curva dada por la representación paramétrica  $(I, \mathbf{x})$ ,  $I = (0, 10)$ ,

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, -t).$$

Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

**Solución:**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. (1 punto) Estudie cuándo es regular la parametrización de la superficie  $S$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2, u - v^2, u^2 - v^2)$$

con  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

**Solución:**

## EJERCICIOS

5. Sea la curva de ecuaciones  $\mathbf{x}(t) = (x, y, z)$  donde:

$$x = t^2, y = t^3 - 1, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Determine la curvatura y la torsión en el punto  $\mathbf{x}(0)$ .

b) (1 punto) Determine el triedro de Frenet en el punto  $\mathbf{x}(0)$ .

c) (1 punto) Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto  $\mathbf{x}(0)$ .

6. Tenemos la esfera de centro  $(0, 0, 0)$  y radio 1, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para la latitud  $\theta \in [0, 2\pi]$  y la longitud  $\phi \in [0, \pi]$ .

a) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto genérico de la esfera  $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ .

b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico de la esfera  $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ .

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

## Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE) (du)^2 + (eG - gE) dudv + (fG - gF) (dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70