

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

**PREGUNTAS CORTAS**

1. (1 punto) Determine las coordenadas baricéntricas del punto  $\mathbf{p} = (0, 0)$  en la referencia afín  $\mathbf{p}_0 = (1, -1)$ ,  $\mathbf{p}_1 = (1, 1)$  y  $\mathbf{p}_2 = (2, -1)$ .

**Solución:**

2. (1 punto) Escriba los polinomios de Bernstein  $B_0^2(t)$ ,  $B_1^2(t)$  y  $B_2^2(t)$ .

**Solución:**

3. (1 punto) Estudie si las ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, \cos t + \sin t).$$

definen una curva regular.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva

$$\mathbf{x}(t) = (2t, t^2 + 1, e^t)$$

en cualquier punto  $\mathbf{x}(t)$ , con el vector  $(1, 0, 1)$ . Es suficiente con dar la expresión de su coseno.

**Solución:**

## EJERCICIOS

5. Sea  $C$  la curva dada, para  $t > 0$ , por

$$\mathbf{x}(t) = \left( 8\sqrt{t}, 2t^2, \frac{2}{t} \right).$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular la longitud de arco entre 1 y  $t_0 \in [1, 2]$ .
- (1 punto) Determinar la curvatura y la torsión en  $\mathbf{x}(1)$ .
- (1 punto) Determinar el plano osculador en el punto  $\mathbf{x}(1)$ .

6. Sea  $S$  la superficie parametrizada, para  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2).$$

Se pide:

- (0.75 puntos) Estudiar si es una parametrización regular.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

## Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE) (du)^2 + (eG - gE) dudv + (fG - gF) (dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70