E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2019. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Determine las coordenadas baricéntricas del punto $\mathbf{p} = (0,0)$ en la referencia afín $\mathbf{p}_0 = (1,-1)$, $\mathbf{p}_1 = (1,1)$ y $\mathbf{p}_2 = (2,-1)$.

   Solución. Tenemos que encontrar λ_0, λ_1 y λ_2 tales que

   $$(0,0) = \lambda_0(1,-1) + \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,-1),$$

   con $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. Entonces

   $$\begin{aligned}(0,0) &= \lambda_0(1,-1) + \lambda_1(1,1) + (1-\lambda_0-\lambda_1)(2,-1) \\ &= (2-\lambda_0-\lambda_1, 2\lambda_1 - 1).\end{aligned}$$

   Entonces obtenemos las ecuaciones

   $$\left.\begin{array}{l} 0 = 2-\lambda_0-\lambda_1, \\ 0 = 2\lambda_1 - 1. \end{array}\right\}$$

   Obviamente

   $$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(\text{segunda ecuación}), \\ 0 = 2-\lambda_0-\lambda_1 &\Longrightarrow \lambda_0 = 2-\lambda_1 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

   Utilizando la relación entre las coordendas baricéntricas obtenemos λ_2:

   $$\lambda_2 = 1-\lambda_0-\lambda_1 = 1-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = -1.$$

   Y obtenemos las coordenadas pedidas:

   $$(0,0) = \frac{3}{2}(1,-1) + \frac{1}{2}(1,1) - 1\cdot(2,-1).$$

2. (1 punto) Escriba los polinomios de Bernstein $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ y $B_2^2(t)$.

   Solución.

   $$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

3. (1 punto) Estudie si las ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, \cos t + \operatorname{sen} t\right).$$

definen una curva regular.

Solución. Para que sea una curva regular debe cumplirse que la función sea diferenciable (que lo es, porque sus componentes son continuas y tienen derivadas continuas hasta cualqeuir orden) y no debe tener puntos singulares, es decir, siempre debe ser

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0).$$

Al resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 2t = 0, \\ y'(t) = -\operatorname{sen} t + \cos t = 0, \end{array}\right\}$$

de la primera ecuación se deduce que $t = 0$, pero $y'(0) = 1$. Como no se anulan las dos a la vez, la función es regular.

4. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva

$$\mathbf{x}(t) = \left(2t, t^2 + 1, e^t\right)$$

en cualquier punto $\mathbf{x}(t)$, con el vector $(1,0,1)$. Es suficiente con dar la expresión de su coseno.

Solución. Los vectores tangentes a la curva son de la forma:

$$\mathbf{x}'(t) = (2, 2t, e^t).$$

Para calcular el ángulo α que forman con el vector $(1,0,1)$, hacemos

$$\cos\alpha = \frac{(2,2t,e^t)\cdot(1,0,1)}{\|(2,2t,e^t)\|\,\|(1,0,1)\|} = \frac{2+e^t}{\sqrt{(4+4t^2+e^{2t})}\sqrt{2}}.$$

EJERCICIOS

5. Sea C la curva dada, para $t > 0$, por

$$\mathbf{x}(t) = \left(8\sqrt{t}, 2t^2, \frac{2}{t}\right).$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular la longitud de arco entre 1 y $t_0 \in [1,2]$.

b) (1 punto) Determinar la curvatura y la torsión en $\mathbf{x}(1)$.

c) (1 punto) Determinar el plano osculador en el punto $\mathbf{x}(1)$.

Solución.

a) Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = \left(\frac{4}{\sqrt{t}}, 4t, -\frac{2}{t^2}\right),$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)^2 + (4t)^2 + \left(-\frac{2}{t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{t} + 16t^2 + \frac{4}{t^4}} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 (4t^6 + 4t^3 + 1)}$$

$$= \frac{2}{t^2}\sqrt{4t^6 + 4t^3 + 1} = \frac{2}{t^2}\sqrt{(2t^3+1)^2} = \frac{2}{t^2}\left(2t^3+1\right) = 4t + \frac{2}{t^2}.$$

La longitud de arco es:

$$I = \int_1^{t_0} (\|\mathbf{x}'(t)\|)\, dt = \int_1^{t_0} \left(4t + \frac{2}{t^2}\right) dt = \int_1^{t_0} 4t dt + \int_1^{t_0} \frac{2}{t^2} dt$$
$$= 2t^2 - \frac{2}{t}\Big|_1^{t_0} = 2t_0^2 - \frac{2}{t_0} - \left(2 - \frac{2}{1}\right) = 2t_0^2 - \frac{2}{t_0}.$$

b) Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(\frac{4}{\sqrt{t}}, 4t, -\frac{2}{t^2}\right), \quad \mathbf{x}''(t) = \left(-\frac{2}{\sqrt{t^3}}, 4, \frac{4}{t^3}\right) = \left(-\frac{2}{t\sqrt{t}}, 4, \frac{4}{t^3}\right),$$
$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = \left(\frac{4}{\sqrt{t}}, 4t, -\frac{2}{t^2}\right) \times \left(-\frac{2}{t\sqrt{t}}, 4, \frac{4}{t^3}\right) = \left(\frac{24}{t^2}, \frac{12}{t^{\frac{7}{2}}}, \frac{24}{\sqrt{t}}\right).$$

Además:

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = 4t + \frac{2}{t^2},$$
$$\|\mathbf{x}''(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{t^3}}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{4}{t^2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{1}{t^3} + \frac{4}{t^4} + 4},$$
$$\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| = \sqrt{\left(\frac{24}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{12}{t^{\frac{7}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{t}}\right)^2} = 12\sqrt{\frac{4}{t} + \frac{4}{t^4} + \frac{1}{t^7}}.$$

Particularizando en $\mathbf{x}(1)$ tenemos:

$$\mathbf{x}'(1) = \left(\frac{4}{\sqrt{1}}, 4 \cdot 1, -\frac{2}{1^2}\right) = (4, 4, -2),$$
$$\mathbf{x}''(1) = \left(-\frac{2}{1\sqrt{1}}, 4, \frac{4}{1^3}\right) = (-2, 4, 4),$$
$$\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = (4, 4, -2) \times (-2, 4, 4) = (24, -12, 24),$$
$$\|\mathbf{x}'(1)\| = 6,$$
$$\|\mathbf{x}''(1)\| = 6,$$
$$\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\| = 12\sqrt{\frac{4}{1} + \frac{4}{1^4} + \frac{1}{1}} = 36.$$

La curvatura es

$$k(1) = \frac{\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\|}{\|\mathbf{x}'(1)\|^3} = \frac{36}{6^3} = \frac{1}{6}.$$

Por otro lado, como la curva no está parametrizada por el arco, para la torsión utilizamos

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Tenemos

$$\mathbf{x}'''(t) = \left(\frac{3}{t^2\sqrt{t}}, 0, \frac{-12}{t^4}\right), \quad \mathbf{x}'''(1) = \left(\frac{3}{1}, 0, \frac{-12}{1^4}\right) = (3, 0, -12).$$

Entonces:

$$\tau(1) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(1), \mathbf{x}''(1), \mathbf{x}'''(1))}{\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\|^2} = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & -12 \end{vmatrix}}{36^2} = -\frac{-216}{1296} = \frac{1}{6}.$$

c) El plano osculador contiene a los vectores tangente y normal y también a los vectores $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$. Entonces, es perpendicular al vector

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = \left(\frac{4}{\sqrt{t}}, 4t, -\frac{2}{t^2}\right) \times \left(-\frac{2}{t\sqrt{t}}, 4, \frac{4}{t^3}\right) = \left(\frac{24}{t^2}, \frac{12}{t^{\frac{7}{2}}}, \frac{24}{\sqrt{t}}\right),$$

que en $t = 1$ es:

$$\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = (4, 4, -2) \times (-2, 4, 4) = (24, -12, 24),$$

que tiene la misma dirección y sentido que el vector $(2, -1, 2)$. Por otro lado, como $\mathbf{x}(1) = (8, 2, 2)$, la ecuación del plano osculador es

$$(2, -1, 2) \cdot (x - 8, y - 2, z - 2) = 0 \Longleftrightarrow 2x - y + 2z = 18.$$

6. Sea S la superficie parametrizada, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u \cos v, u\operatorname{sen} v, u^2\right).$$

Se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si es una parametrización regular.

b) (1 punto) Determinar el plano tangente y la normal a la superficie en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.

c) (1.25 puntos) Determinar el ángulo que forman las curvas parámetro en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.

Solución.

a) Una parametrización es regular en los puntos donde $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq (0, 0, 0)$. Como

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u \cos v, u\operatorname{sen} v, u^2\right),$$

entonces

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u), \ \mathbf{x}_v(u, v) = (-u\operatorname{sen} v, u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 2u \\ -u\operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(-2u^2 \cos v, -2u^2 \operatorname{sen} v, u \cos^2 v + u\operatorname{sen}^2 v\right)$$

$$= \left(-2u^2 \cos v, -2u^2 \operatorname{sen} v, u\right).$$

Este vector es igual al vector nulo si y sólo si:

$$\left(-2u^2 \cos v, -2u^2 \operatorname{sen} v, u\right) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow u = 0.$$

por eso, es una parametrización regular si $u \neq 0$.

b) El punto $\mathbf{x}(1, 0)$ es

$$\mathbf{x}(1, 0) = \left(1 \cdot \cos 0, 1 \cdot \operatorname{sen} 0, 1^2\right) = (1, 0, 1).$$

Para determinar el plano tangente tenemos que determinar los vectores $\mathbf{x}_u(u, v)$ y $\mathbf{x}_v(u, v)$:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-u\operatorname{sen} v, u \cos v, 0),$$

luego

$$\mathbf{x}_u(1, 0) = (1, 0, 2), \quad \mathbf{x}_v(1, 0) = (0, 1, 0)$$

Sabemos que el plano tangente pasa por $\mathbf{x}(1,0)=(1,0,1)$ y contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(1,0)=(1,0,2)$ y $\mathbf{x}_v(1,0)=(0,1,0)$, es decir, cumple

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=z-2x+1,$$

o $2x-z=1$.

La recta normal tiene la dirección del vector

$$\mathbf{N}(1,0)=\mathbf{x}_u(1,0)\times\mathbf{x}_u(1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-2,0,1).$$

Su ecuación es:

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(-2,0,1).$$

En este problema se ha considerado también válido si se ha determiando sólo el vector normal.

$c)$ Según los apuntes, el coseno del ángulo de las curvas parámetro está dado por

$$\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Entonces, eterminamos primero los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned}
E&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=(\cos v,\operatorname{sen} v,2u)\cdot(\cos v,\operatorname{sen} v,2u)=\cos^2 v+\operatorname{sen}^2 v+(2u)^2=1+4u^2,\\
F&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=(\cos v,\operatorname{sen} v,2u)\cdot(-u\operatorname{sen} v,u\cos v,0)=-u\cos v\operatorname{sen} v+u\cos v\operatorname{sen} v=0,\\
G&=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=(-u\operatorname{sen} v,u\cos v,0)\cdot(-u\operatorname{sen} v,u\cos v,0)=(-u\operatorname{sen} v)^2+(u\cos v)^2=u^2.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
E&=1+4u^2,\\
F&=0,\\
G&=u^2.
\end{aligned}$$

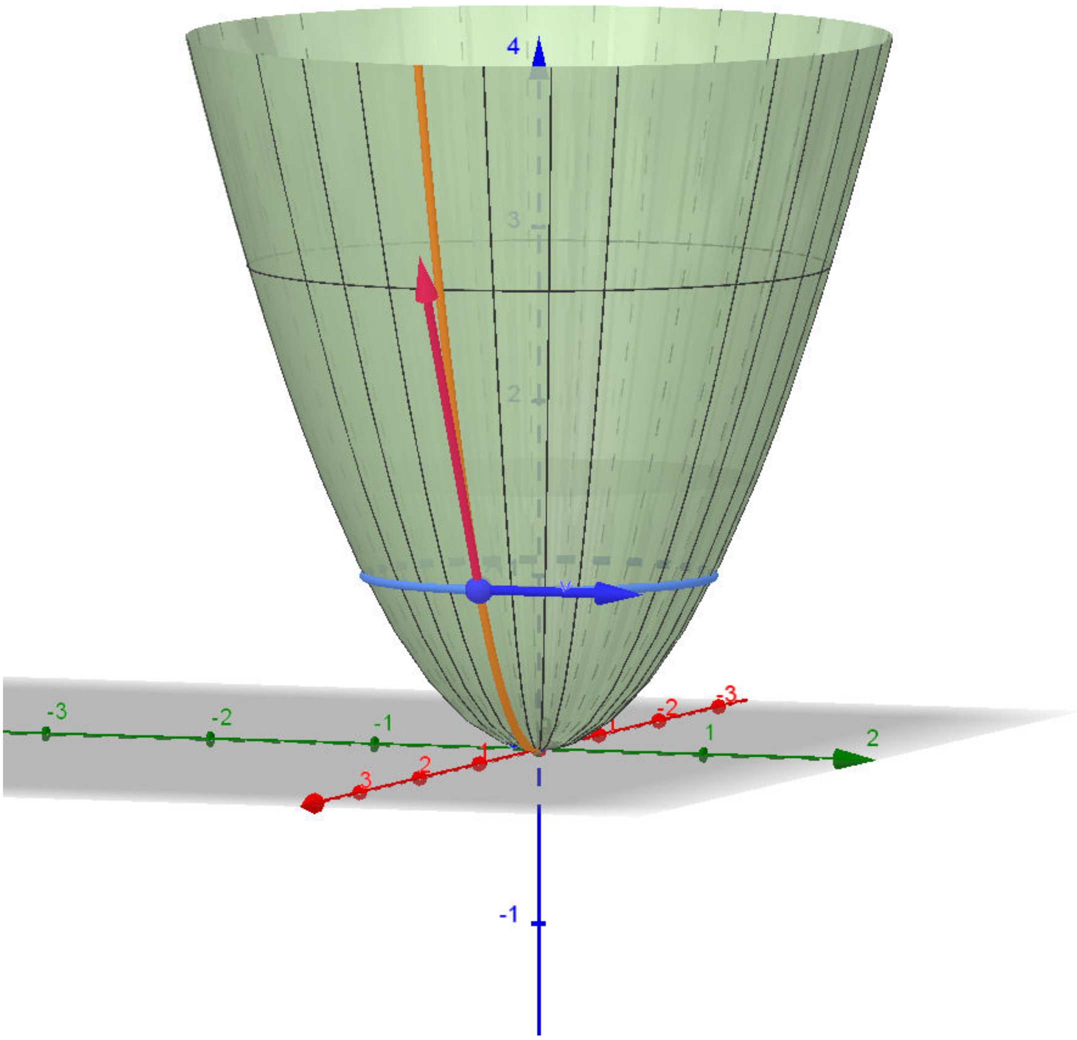
Luego:

$$\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{EG}}=0.$$

Luego ambas curvas son ortogonales.

Se podía haber resuelto directamente con el producto escalar de los vectores.$\mathbf{x}_u(1,0)$ y $\mathbf{x}_v(1,0)$.

La representación gráfica de la superficie es:


4
3
2
-1
-3
-2
-1
1
2
3
2
1
1
-2
-3
v

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2019. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Consideramos el espacio $\mathbb{R}^4$. Sea

$$M = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0, t = 0 \right\}$$

y sea N la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(1,-1,-1,0)$. ¿Son ortogonales?

Solución. Tenemos que comprobar si el producto escalar de cualquier elemento de M con cualquier elemento de N es 0. Para ello, determinamos la expresión de cualquier elemento de M y N. Si $(x,y,z,t) \in M$, entonces como $x = y - 2z$ para los puntos de M, podemos escribir cada punto de M como

$$(\lambda - 2\mu, \lambda, \mu, 0)\,.$$

Entonces, hay que estudiar si

$$(\lambda - 2\mu, \lambda, \mu, 0) \cdot (1,-1,-1,0) = 0.$$

Como:

$$(\lambda - 2\mu, \lambda, \mu, 0) \cdot (1,-1,-1,0) = \lambda - 2\mu - \lambda - \mu = -3\mu,$$

entonces si $\mu = 0$ son ortogonales. Esto es lo mismo que decir que

$$(\lambda - 2\mu, \lambda, \mu, 0) = (\lambda, \lambda, 0, 0)\,,$$

es decir, en los puntos $(x,y,0,0) \in M$ son ortogononales.

Este problema no se puede resolver considerando qeu el vector $(1,-1,2,0)$ es un vector de M, un "vector director"de M o que M es un plano y es un vector suyo.

2. (1 punto) Sea $\mathbf{x}(t)$, con $t \in [0,1]$ una curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n\}$ ¿Cuánto valen $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{x}(1)$? Razone la respuesta.

Solución. Recuerde que en una curva de Bézier el punto $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$ y $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n$. Podemos demostrarlo. Una curva de Bézier es

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)\,.$$

Sabemos que

$$B_i^n(t) = \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) t^i (1-t)^{n-i}\,.$$

Por eso, para $i \neq 0, n$, y $t \in [0,1]$, es:

$$B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0.$$

Además:

$$B_0^n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n = (1-t)^n, \quad B_0^n(0) = 1, \quad B_0^n(1) = 0,$$
$$B_n^n(t) = \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 = t^n, \quad B_n^n(0) = 0, \quad B_n^n(1) = 1.$$

Por eso:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(0) = \mathbf{b}_0,$$
$$\mathbf{x}(1) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(1) = \mathbf{b}_n.$$

3. (1 punto) Sea C la curva dada por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \left(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, t^2 + 1\right).$$

Calcule el vector binormal en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución. Se tiene que

$$\mathbf{x}(0) = (2, 0, 2),$$

y por ello calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t), \quad & \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 0); \\ \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 2), \quad & \mathbf{x}''(0) &= (-1, 0, 2). \end{aligned}$$

Por tanto, la dirección del vector binormal es la del vector

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2i + k,$$

o equivalentemente, el vector $(2, 0, 1)$. Como el vector binormal es unitario,

$$\mathbf{b}(0) = \frac{(2, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + (0)^2 + 1^2}} = \left(2, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

4. (1 punto) Sea S la superficie dada por la parametrización:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + 2v, u - v, u^2 + v^2).$$

Se pide determinar en qué puntos de S el plano tangente es paralelo al plano $2x - y + 2z = 0$.

Solución. Como

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 1, 2u), \ \mathbf{x}_v(u, v) = (2, -1, 2v),$$

entonces

$$\mathbf{N} = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) = (1, 1, 2u) \times (2, -1, 2v) = (2u + 2v, 4u - 2v, -3).$$

Este vector es perpendicular al plano tangente.

Por otro lado, un vector perpendicular al plano $2x - y + 2z = 0$ es $(2, -1, 2)$. Para que los dos planos sean paralelos debe cumplirse

$$(2u + 2v, 4u - 2v, -3) = k\,(2, -1, 2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2u + 2v = 2k, \\ 4u - 2v = -k, \\ -3 = 2k \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u + v = k, \\ 4u - 2v = -k, \\ k = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u + v = -\frac{3}{2}, \\ 4u - 2v = \frac{3}{2}, \\ k = -\frac{3}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2u + 2v = -3, \\ 4u - 2v = \frac{3}{2}, \\ k = -\frac{3}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow 6u = -\frac{6}{2} \Longrightarrow u = -\frac{1}{4} \Longrightarrow v = -\frac{5}{4}$$

Entonces el punto donde se cumple es el punto $u = -\frac{1}{4}, v = -\frac{5}{4}$, es decir en el punto

$$\mathbf{x}\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4} + 2\left(-\frac{5}{4}\right), -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}, \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) = \left(-\frac{11}{4}, 1, \frac{13}{8}\right).$$

EJERCICIOS

5. Consideramos la familia de curvas dadas, para $\lambda > 0$, por

$$\left\{y = (x - \lambda)^2 + \lambda^2 : \lambda > 0\right\}.$$

Se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación paramétrica de cada recta de la familia.

b) (0.75 puntos) Determinar la ecuación $\mathbf{e}\,(\lambda)$ de su envolvente.

c) (0.75 puntos) Determinar la recta tangente y el vector normal a cada punto $\mathbf{x}\,(t_0)$ de la curva dada, para $t \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}\,(t) = \left(2t, 2t^2\right).$$

d) (0.75 puntos) Determinar la curvatura de un punto genérico $\mathbf{x}\,(t)$ de la curva del apartado anterior.

Solución.

a) Consideramos que x es t y para cada λ tenemos:

$$\mathbf{x}\,(\lambda, t) = \left(t, (t - \lambda)^2 + \lambda^2\right).$$

b) Para determinar la ecuación de la envolvente tenemos que hacer:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = (0, -2\,(t - \lambda) + 2\lambda) = (0, 4\lambda - 2t),$$
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = (1, 2\,(t - \lambda)),$$

porque en la envolvente se debe cumplir:

$$0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \left| \begin{array}{ll} 0 & 1 \\ 4\lambda - 2t & 2\,(t - \lambda) \end{array} \right| = 2t - 4\lambda.$$

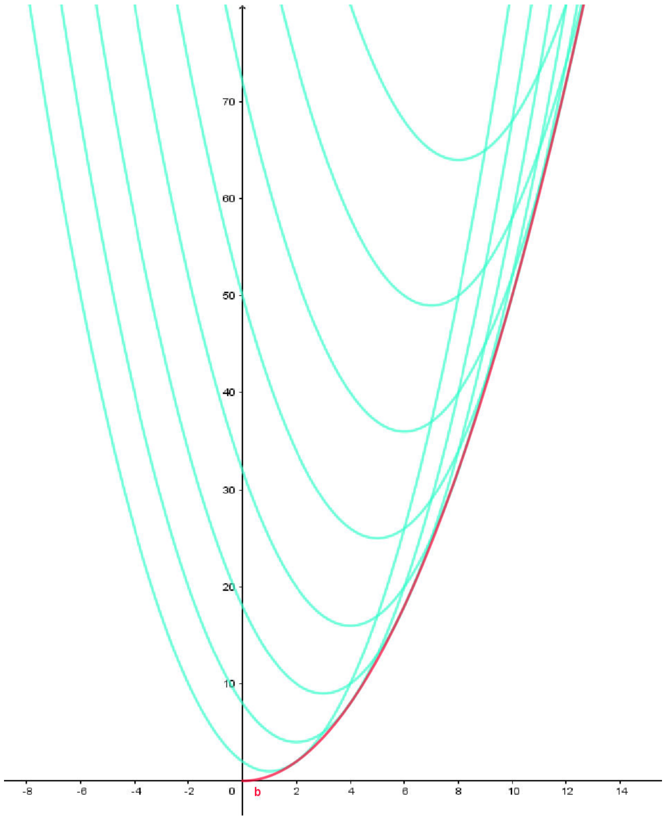
A partir de esta ecuación, encontramos la relación entre t y λ:

$$2t - 4\lambda = 0 \Longleftrightarrow t - 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow t = 2\lambda.$$

Sustituyendo estos valores de t en la ecuación de la familia, tenemos la envolvente

$$\begin{aligned} \mathbf{e}\,(\lambda) = \mathbf{x}\,(\lambda, 2\lambda) &= \left(2\lambda, (2\lambda - \lambda)^2 + \lambda^2\right) \\ &= \left(2\lambda, 2\lambda^2\right). \end{aligned}$$

La gráfica es



c) Esta curva es la envolvente del apartado anterior. Un vector tangente a

$$\mathbf{x}(t) = \left(2t, 2t^2\right)$$

es

$$\mathbf{x}'(t) = (2, 4t).$$

La recta tangente que pasa por el punto $\mathbf{x}(t_0)$ tiene por ecuación paramétrica:

$$(x, y) = \mathbf{x}(t_0) + \mu \mathbf{x}'(t_0) = \left(2t_0, 2t_0^2\right) + \mu(2, 4t_0) = \left(2t_0 + 2\mu, 2t_0^2 + 4\mu t_0\right).$$

El vector normal es el perpendicular al vector tangente, formando base positiva y es unitario. Por tanto, tiene la misma dirección y sentido que el vector

$$(-4t, 2).$$

Para que sea unitario es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|(-4t, 2)\|}(-4t, 2) = \frac{1}{\sqrt{16t^2 + 4}}(-4t, 2) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}}(-2t, 1).$$

d) Partimos de la ecuación:

$$\mathbf{x}(t) = \left(2t, 2t^2\right).$$

Queremos determinar la curvatura en $\mathbf{x}(t)$.

El vector $\mathbf{x}(t)$ no es unitario:

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \|(-4t, 2)\| = \sqrt{16t^2 + 4} = 2\sqrt{4t^2 + 1}.$$

Entonces la curva no está parametrizada por la longitud de arco y la función curvatura tiene la expresión

$$k(\lambda) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

En esta curva, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}''(t) &= (0,4)\,, \\
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 4t \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \frac{1}{\left(2\sqrt{4t^2+1}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{4t^2+1}\right)^3}.
\end{aligned}$$

6. Sea S la la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi)\,,$$

para $\theta \in [0,2\pi]\,, \phi \in [0,\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental.

b) (1 punto) Determinar las curvaturas principales y las direcciones principales.

c) (1 punto) Sabiendo que

$$\begin{aligned}
A &= (\theta')^2\,\mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\theta + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta + (\phi')^2\,\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta = R^2\theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi, \\
B &= (\theta')^2\,\mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\phi + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi + (\phi')^2\,\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi = -\frac{1}{2}R^2(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi,
\end{aligned}$$

demuestre que la curva

$$\mathbf{c}(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, 0)$$

contenida en la esfera y que pasa por $(0,R,0)$ es una curva geodésica.

Solución.

a) En un punto $\mathbf{x}(\theta,\phi)$ se tiene

$$\mathbf{x}_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\,,\ \mathbf{x}_\phi = (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_\theta\cdot\mathbf{x}_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\cdot(-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0) \\
&= R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + R^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi = R^2\operatorname{sen}^2\phi, \\
F &= \mathbf{x}_\theta\cdot\mathbf{x}_\phi = (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\cdot(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= -R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\phi + R^2\cos\theta\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\cos\phi = 0, \\
G &= \mathbf{x}_\phi\cdot\mathbf{x}_\phi = (R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi)\cdot(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= R^2\cos^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\phi = R^2.
\end{aligned}$$

b) Necesitamos los coeficientes de la segunda forma fundamental. Tenemos que calcular el vector normal. El vector

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\theta\times\mathbf{x}_\phi &= (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\times(R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= R^2\left(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)\,,
\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_\theta\times\mathbf{x}_\phi\| &= R^2\sqrt{(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\cos\phi\operatorname{sen}\phi)^2} \\
&= R^2\operatorname{sen}\phi.
\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} &= \frac{R^2}{R^2 \operatorname{sen}\phi}\left(-\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi \operatorname{sen}\phi\right) \\ &= \left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right).\end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{x}_{\phi\phi} = \left(-R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\right),$$

ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\theta} = \left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right)\cdot\left(-R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right) \\ &= R\operatorname{sen}^2\phi \\ f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\phi} = \left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right)\cdot\left(-R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0\right) \\ &= 0, \\ g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\phi\phi} = \left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right)\cdot\left(-R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -R\cos\phi\right) \\ &= R.\end{aligned}$$

La ecuación de las curvaturas principales es:

$$\begin{aligned}\left(EG - F^2\right)k^2 - \left(Eg + Ge - 2Ff\right)k + \left(eg - f^2\right) = 0 \iff \\ R^4\operatorname{sen}^2\phi k^2 + 2R^3\operatorname{sen}^2\phi k + R^2\operatorname{sen}^2\phi = 0.\end{aligned}$$

Podemos suponer que $\phi \neq 0, \pi$, ya que en ese caso se trataría de dos puntos únicos (los polos). Entonces s una ecuación de segundo grado, y su solución es:

$$\begin{aligned} k &= \frac{-2R^3\operatorname{sen}^2\phi \pm \sqrt{\left(2R^3\operatorname{sen}^2\phi\right)^2 - 4R^4\operatorname{sen}^2\phi R^2\operatorname{sen}^2\phi}}{2R^4\operatorname{sen}^2\phi} \\ &= \frac{-2R^3\operatorname{sen}^2\phi}{2R^4\operatorname{sen}^2\phi} = -\frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Entones la esfera tiene única curvatura principal:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{R}.$$

y todas las direcciones son principales.

c) La condición de las curvas geodésicas es:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\,\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u \\ (u')^2\,\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con los datos del enunciado y considerando la esfera,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} R^2\operatorname{sen}^2\phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta'' \\ \phi'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \\ \begin{pmatrix} R^2\operatorname{sen}^2\phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta'' \\ \phi'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R^2\theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi \\ -\frac{1}{2}R^2(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Esto implica:

$$\begin{cases} 0 = \theta''\operatorname{sen}^2\phi + \theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi, \\ 0 = \phi'' - \frac{1}{2}(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi. \end{cases}$$

Para el punto $(0,R,0)=\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, podemos escribir la curva $\mathbf{c}\,(t)=(R\cos t,R\mathrm{sen}\,t,0)$ como

$$\mathbf{c}\,(t)=(R\cos t,R\mathrm{sen}\,t,0)=\mathbf{x}\,(\theta\,(t)\,,\phi\,(t))=\mathbf{x}\left(t,\frac{\pi}{2}\right).$$

Es decir:

$$\theta\,(t)=t,\ \phi\,(t)=\frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$\begin{array}{ll}\phi'\,(t)=0, & \phi''\,(t)=0,\\ \theta'\,(t)=1, & \theta''\,(t)=0.\end{array}$$

La ecuación de las geodésicas queda

$$\begin{cases} 0=0+1\cdot 0\cdot \mathrm{sen}\,2\phi\,(t)\,, \\ 0=0-\frac{1}{2}(1)^2\mathrm{sen}\,2\phi\,(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\pi. \end{cases}$$

Como estas igualdades son ciertas, entonces esta línea (corresponde al ecuador) es una geodésica.