

EA. Examen de mayo. Anillos. Grado en Matemáticas

12 de mayo de 2016

---

1. Teoría:

- a) (0,5 puntos) Define ideal primo e ideal maximal.
- b) (1,5 puntos) Sean  $A$  un anillo conmutativo con unidad e  $I \neq A$  un ideal de  $A$ . Demuestra que  $I$  es primo si y sólo si  $A/I$  es un dominio de integridad.
- c) (1 punto) Enumera todos los ideales de  $\mathbb{Z}$ . Di cuáles son primos y cuáles son maximales.

2. Di, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, proporcionando demostraciones o contraejemplos según sea necesario:

- a) (0,5 puntos)  $p(x) = x^{20} + 2$  es irreducible sobre  $\mathbb{C}[x]$ .
- b) (0,5 puntos)  $p(x) = x^{20} + 2$  es irreducible sobre  $\mathbb{R}[x]$ .
- c) (0,5 puntos)  $p(x) = x^{20} + 2$  es irreducible sobre  $\mathbb{Q}[x]$ .
- d) (0,5 puntos)  $p(x) = x^{20} + 2$  es irreducible sobre  $\mathbb{Z}_3[x]$ .
- e) (1 punto) La función  $f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  definida como  $f([a]_4) = [3a]_4$  es isomorfismo de anillos.
- f) (1 punto) La función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $f(a + bi) = a - bi$  es isomorfismo de anillos.

3. Considera el anillo  $A = \mathbb{Z}_5[x]$  y el ideal  $I = (x^2 + 1)$ .

- a) (1,5 puntos) Demuestra que  $A/I$  NO es un cuerpo. Nota: enunciado rectificado.
- b) (1 punto) Encuentra el inverso de  $[x]_I$  en  $A/I$ . Nota:  $[x]_I$  es la clase módulo  $I$  del polinomio  $p(x) = x$ , que también se puede denotar  $x + I$ .
- c) (0,5 puntos) ¿Cuántos elementos tiene  $A/I$ ?

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white starburst effect behind the '99'. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70