

Parte I: anillos.

-
1. (3 puntos) Sean K un cuerpo $A = K[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en K .
 - a) (1 punto) Define polinomio irreducible en A . Incluye las definiciones de que un polinomio divida a otro y de que dos polinomios sean asociados.
 - b) (1 punto) Demuestra que un polinomio es invertible en A si y solo si es un polinomio constante distinto de cero.
 - c) (1 punto) Enuncia el criterio de Eisenstein y el criterio modular para la divisibilidad de polinomios.
 2. (3 puntos) Considera los anillos $A = \mathbb{Z}_{20}$, $B = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ y $C = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.
 - a) (1,5 puntos) Para cada dos de estos anillos, determina si son isomorfos. En caso negativo, justifica tu respuesta y en caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre ellos.
 - b) (1,5 puntos) Encuentra todos los ideales de A . Di cuáles de ellos son primos y cuáles no. Di cuáles son maximales y cuáles no. Justifica tus respuestas.

Nota: Puedes usar libremente resultados que hayamos visto en teoría o en ejercicios (mencionando qué resultado estás usando).

3. (4 puntos + Extra: 1 punto) Considera los anillos $A = \mathbb{Z}_{20}$ y $B = \mathbb{Z}_{10}$ y la función $f : A \rightarrow B$ definida como $f([a]_{20}) = [6a]_{10}$.
 - a) (0,5 puntos) Demuestra que f está bien definida.
 - b) (1 punto) Demuestra que f es un homomorfismo de anillos.
 - c) (1 punto) Halla $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
 - d) (0,5 puntos) Determina si f es inyectiva y si es suprayectiva.
 - e) (1 punto) Construye explícitamente el cociente $A/\text{Ker}(f)$, hallando las clases de equivalencia que lo forman y los elementos que forman cada una de dichas clases.
 - f) (Extra: 1 punto) Usa el primer teorema de isomorfía para encontrar un subanillo C de B al que sea isomorfo $A/\text{Ker}(f)$. Escribe explícitamente el isomorfismo. ¿Tiene unidad C ?

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white starburst effect behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Parte II: grupos.

4. (3 puntos) Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfía para grupos. Incluye la demostración de que si $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos entonces $\text{Ker}(f)$ es subgrupo de G y además es normal.
5. (4 puntos + Extra: 1 punto) Consideramos el grupo multiplicativo $G = \mathbb{Z}_{21}^*$. Se sabe que en G el máximo de los órdenes de los elementos es 6 (este hecho es parte del enunciado, se da por supuesto y no es necesario demostrarlo).
- a) (1 punto) ¿Es G isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Z}_{12} ? En caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre los dos grupos, en caso negativo justifica tu respuesta.
 - b) (1 punto) ¿Es G isomorfo al grupo alternado A_4 ? En caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre los dos grupos, en caso negativo justifica tu respuesta.
 - c) (0,5 puntos) Consideramos $H = \langle 8 \rangle$ como subgrupo de G . Demuestra, **sin hacer operaciones**, que H es subgrupo normal de G .
 - d) (1,5 puntos) Construye explícitamente el cociente G/H , diciendo cuántos elementos tiene y hallando todas las clases de equivalencia y los elementos de G que constituyen cada una de esas clases.
 - e) (Extra: 1 punto) Sea $R_6 = \{z \in \mathbb{C} / z^6 = 1\}$ el grupo multiplicativo formado por las raíces sextas de la unidad. ¿Es G/H isomorfo a R_6 ? En caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre los dos grupos, en caso negativo justifica tu respuesta.
6. (3 puntos) Sean $G = D_8$ y $H = \{id, \sigma^4, \tau, \tau\sigma^4\}$, donde $\sigma = (12345678)$ y $\tau = (28)(37)(46)$. Se da por supuesto que H es un subgrupo de G .
- a) (1 punto) Demuestra que H no es normal en G .
 - b) (2 puntos) Considera la acción natural de H sobre $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (cada permutación es una función de B en B , esta es la acción que se está considerando). Halla razonadamente las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B bajo esta acción.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white starburst shape behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70